Решение вступительной работы в ФТШ по физике

8 класс, 2018 год

1. Птица садится

А) Пока птица не села на палку, натяжение нитей связано только с силой тяжести палки, равной 10 Н. По условию палка однородная и ее сила тяжести поровну распределяется между нитями.

1. Если птица сядет ровно на середину палки, то сила тяжести птицы так же поровну распределится между нитями. В таком случае сила натяжения каждой из нитей будет равна 10 Н и нити не порвутся.
2. Если птица сядет на левый край палки, то вся сила тяжести птицы будет действовать на нить 1. В таком случае суммарная сила, действующая на эту нить, будет равна 15 Н и нить порвется.

Б) Найдем область безопасной посадки. Пусть птица сидит на палке на расстоянии x от левого края, в таком случае расстояние до правого края равно $l - x$. Обозначим силы натяжения нитей T_1 и T_2. Тогда сумма сил натяжения равна суммарной силе тяжести палки и птицы:

$$T_1 + T_2 = 2mg.$$

Также можем записать сумму моментов сил относительно центра палки:

$$T_1 \frac{l}{2} = T_2 \frac{l}{2} + mg\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

Из этих двух уравнений выражаем силы натяжения:

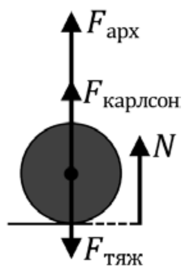
$$T_1 = \frac{3l - 2x}{2l} mg, \quad T_2 = \frac{l + 2x}{2l} mg.$$

Сравнивая эти выражения с максимальными силами натяжения нитей (то есть записывая условия $T_1 < F_1$ и $T_2 < F_2$), находим допустимый диапазон x:

$$x > \frac{3l}{2} - \frac{F_1}{mg} l = 36 \text{ см}, \quad x < \frac{F_2}{mg} l - \frac{l}{2} = 108 \text{ см}.$$

<u>Ответ</u>: «безопасной» для приземления является зона от 36 до 108 см от левого края.

2. Карлсон насолил



Рассмотрим все силы, действующие на шар, лежащий на дне колодца. Вверх на шар действуют три силы: сила Архимеда, сила с которой Карлсон поднимает шар, а также сила реакции опоры, наличие которой и означает что шар лежит на дне. Так как шар находится в состоянии покоя, сумма всех сил, действующих вверх, должна быть равна сумме всех сил, действующих вниз:

$$F_{\text{Арх}} + F_{\text{Карлсон}} + N = F_{\text{тяж}}.$$

Как уже было сказано, условием того, что шар лежит на дне, является наличие силы реакции опоры. С точки зрения уравнения, это условие может быть записано как $N > 0$. Учитывая это, мы для первого случая получаем выражение

$$F_{\text{тяж}} - F_{\text{Арх}} - F_{\text{Карлсон}} > 0$$

или, что то же самое,

$$F_{\text{тяж}} > F_{\text{Арх}} + F_{\text{Карлсон}}.$$

Подставляя в это выражение формулу для силы тяжести $F_{\text{тяж}} = m_{\text{шар}}g = \rho_{\text{шар}}gV_{\text{шар}}$ и формулу для силы Архимеда $F_{\text{Арх}} = \rho_{\text{в}}gV_{\text{шар}}$, получим

$$\rho_{\text{шар}}gV_{\text{шар}} > \rho_{\text{в}}gV_{\text{шар}} + F_{\text{Карлсон}}.$$

Поделив правую и левую часть неравенства на $gV_{\text{шар}}$, получим

$$\rho_{\text{шар}} > \rho_{\text{в}} + \frac{F_{\text{Карлсон}}}{gV_{\text{шар}}}.$$

Подставляя числа, получаем

$$\rho_{\text{шар}} > 1000 + \frac{1000}{10 \cdot 0{,}5} = 1200\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Для того, чтобы аналогично рассмотреть второй случай, нам нужно узнать, какая плотность воды получилась после высыпания туда соли. Для этого нужно найти объем и массу соленой воды.

Так как при высыпании одного пакета соли уровень воды поднимался на 1 см, после высыпания 50 пакетов высота воды в колодце будет 2,5 м. Объем этой воды будет, соответственно, равен $V_{\text{сол.в}} = 2{,}5\ \text{м} \cdot 1\ \text{м}^2 = 2{,}5\ \text{м}^3$.

Масса же этой воды складывается из массы соли, которая равна $m_{\text{соль}} = 50 \cdot 16 = 800$ кг, и массы воды, которую можно посчитать, перемножив первоначальный объем воды на ее плотность: $m_{\text{пр.в}} = 2\ \text{м}^3 \cdot 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 2000$ кг.

Итого плотность получившейся соленой воды будет равна

$$\rho_{\text{сол.в}} = \frac{2000\ \text{кг} + 800\ \text{кг}}{2{,}5\ \text{м}^3} = 1120\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Используя рассуждения, аналогичные тем, что были в первом пункте, но учтя, что в данном случае шар должен всплыть, получим

$$\rho_{\text{шар}} < \rho_{\text{сол.в}} + \frac{F_{\text{Карлсон}}}{gV_{\text{шар}}} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{\text{шар}} < 1120 + \frac{1000}{10 \cdot 0{,}5} = 1320\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: плотность шара могла быть от $1200\ \text{кг}/\text{м}^3$ до $1320\ \text{кг}/\text{м}^3$.

3. *Золото и лед*

А) Для начала найдем объем золотого шарика. Это можно сделать при помощи соотношения размерностей: так как размерность объема – это м^3, то, при уменьшении линейных размеров тела в 10 раз, объем тела, соответственно, изменится в $10^3 = 1000$ раз. Зная объем ледяного шара ($V = 1\ \text{дм}^3$) мы получаем объем золота $v = 1\ \text{см}^3$.

Теперь, зная объем золота, мы можем найти, при каком объеме льда шар начнет тонуть. Проще всего воспользоваться тем фактом, что в этот момент средняя плотность шара будет равна плотности воды:

$$\rho_{\text{в}} = \langle \rho_{\text{ш}} \rangle = \frac{m + M'}{v + V'},$$

где V' – объем льда в этот момент, m – масса золота и M' – масса льда. Преобразуем это выражение:

$$\rho_{\text{в}}(v + V') = m + M' \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{\text{в}}V' - M' = m - \rho_{\text{в}}v.$$

Так как $m = \rho_{\text{з}}v$ и $M' = \rho_{\text{л}}V'$:

$$V'(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}) = v(\rho_{\text{з}} - \rho_{\text{в}}).$$

В этом выражении осталась одна неизвестная – объем льда V', а значит, ее можно найти:

$$V' = \frac{v(\rho_{\text{з}} - \rho_{\text{в}})}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}} = \frac{1 \cdot (20 - 1)}{1 - 0{,}9} = 190\ \text{см}^3.$$

Так как изначальный объем шара был равен $V = 1000$ см^3, разница равна

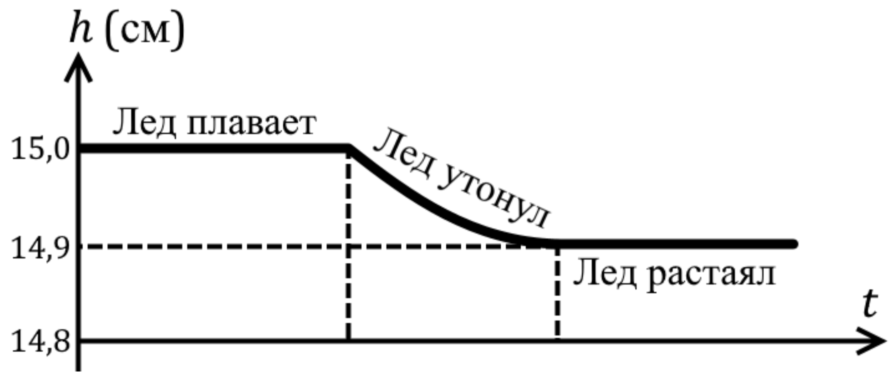
$$\Delta V = V - V' = 1000 - 190 = 810 \text{ см}^3.$$

<u>Ответ</u>: должно растаять 810 см^3 льда.

Б) Для построения графика рассмотрим весь процесс таяния льда.

1. Пока ледяной шар не утонул, высота столба воды меняться не будет. Связано это с тем, что масса воды, вытеснявшейся куском льда ΔV, равна массе воды, образовавшейся при таянии этого куска. А раз равны массы, то равны и объемы.
2. После того, как шар утонул, уровень воды начнет уменьшаться, так как погруженный на дно лед вытесняет объем воды, равный собственному объему V', а воды в процессе таянья образуется $V' \cdot \rho_л / \rho_в = 0{,}9V'$, что меньше.
3. Стоит заметить также, что чем меньше кусок льда, тем меньшая масса льда будет таять за секунду, то есть процесс понижения уровня воды будет замедляться со временем.
4. Когда же весь лед растает, то объем изменится на $\Delta V = V_л - V_в = V - 0{,}9V = 0{,}1V = 19$ см^3. Высота при этом уменьшится, соответственно, на $\Delta h = \Delta V / S = 19/190 = 0{,}1$ см и составит 14,9 см.

В результате получается **<u>ответ</u>:**



4. *Незнайкин драндулет*

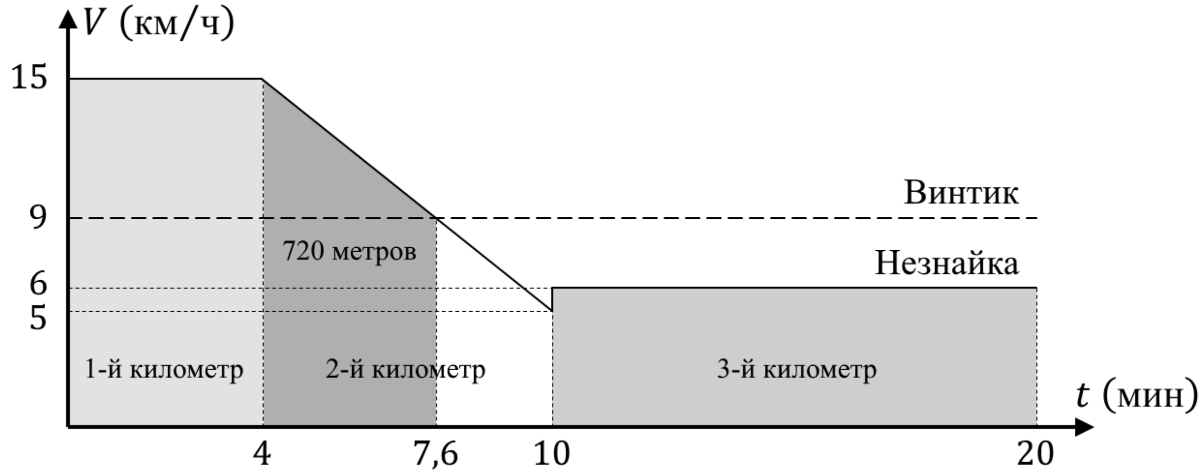
А) Чтобы узнать скорость Винтика, достаточно найти всю длину гонки. Первый километр Незнайка проехал за $1/15 = 4$ минуты, второй километр – за 6 минут. После этого Незнайка ехал еще $20 - 4 - 6 = 10$ минут до встречи с Винтиком со скоростью 6 км/ч, то есть проехал еще 1 км. Таким образом, встреча состоялась на расстоянии ровно 3 км от старта.

Винтик все время бежал с постоянной скоростью 3 км/20 мин = 9 км/ч.

<u>Ответ</u>: скорость Винтика равна 9 км/ч.

Б) Максимальное расстояние между Незнайкой и Винтиком было в тот момент, когда их скорости были равны (до этого момента скорость драндулета была больше, чем Винтика, то есть Незнайка удалялся от товарища). Очевидно, что Незнайка в этот момент был на втором километре пути. На втором километре средняя скорость драндулета равна 1 км/6 мин = 10 км/ч, соответственно скорость снижалась от 15 км/ч до 5 км/ч за 6 минут движения. Тогда скорость драндулета была равна 9 км/ч через 0,6 от 6 минут, то есть через 3 минуты 36 секунд от начала второго километра. Средняя скорость драндулета за это время была равна 12 км/ч, то есть Незнайка проехал 720 м на втором километре пути или 1 км 720 м от старта.

Винтик ехал с постоянной скоростью 9 км/ч и за 7 минут 36 секунд проехал 1 км 140 м.
Ответ: Незнайка опережал Винтика на $1720 - 1140 = 580$ метров.
Замечание: для понимания полезно нарисовать графики скоростей друзей от времени:



Здесь подписаны участки пути, проходимые драндулетом. Каждый из них можно подсчитать как площадь под графиком V от t.
К концу двадцатой минуты площадь под графиком скорости Винтика в точности равна 3 км, то есть они с Незнайкой прошли равный путь.