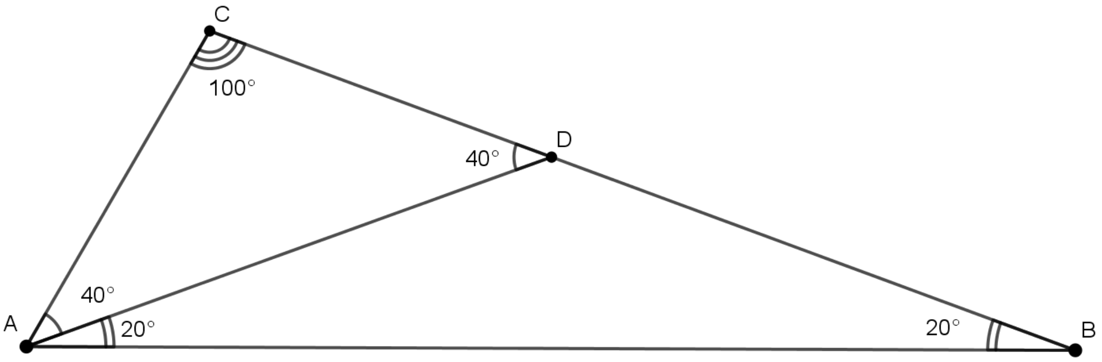
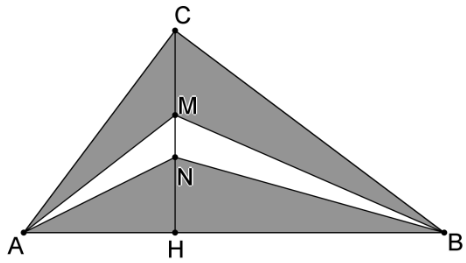
Решения задач вступительной олимпиады. 9 класс. 2018.

1. Два угла треугольника равны 100° и 60°. Покажите, как его разрезать на два равнобедренных треугольника.



2. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AC и BC равны 6 и 8. На высоте CH выбраны точки M и N так, что площадь заштрихованной части равна 19. Найдите MN.



1. Решение. По теореме Пифагора: $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
2. Найдём площадь $\boldsymbol{\Delta}ABC$ двумя способами: во-первых, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$;

во-вторых, $\mathrm{S_{ABC}} = 19 + \mathrm{S_{AMBN}} = 19 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AH} \cdot \mathrm{MN} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{BH} \cdot \mathrm{MN} =$

$= 19 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{MN} \cdot (\mathrm{AH} + \mathrm{BH}) = 19 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{MN} \cdot \mathrm{AB} = 19 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{MN} \cdot 10 = 19 + 5 \cdot \mathrm{MN}$. Далее, $24 = 19 + 5 \cdot \mathrm{MN}$.

Откуда $\mathrm{MN} = 1$. Ответ: $\mathrm{MN} = 1$.

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2 - 1 = b, \\ b^2 - 1 = a. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, разложим на множители. Получим

$a^2 - b^2 = b - a$, $(a - b)(a + b) = b - a$.

Рассмотрим случай $a = b$. Тогда $a^2 - 1 = a$, $a = b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Рассмотрим случай $a + b = -1$. Тогда $a^2 - 1 = -a - 1$,

откуда $a = 0, b = -1$ или $a = -1, b = 0$

Ответ: $a = b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ или $a = 0, b = -1$ или $a = -1, b = 0$.

4. Решите неравенство $\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1} \leq 1$.

Решение. Преобразуем к виду $\frac{(x+1)^2}{(x+3)(x-1)} \geq 0$, воспользуемся методом интервалов.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup \{-1\} \cup (1; +\infty)$.

5. Из города A в город B, расстояние между которыми 100 км, в 9.00 вышли два автобуса, причем скорость одного из них в $1\frac{5}{7}$ раза больше скорости другого. В то же время из города B в город A выехал велосипедист. Первый автобус он встретил в 10.20, а второй – в 11.00. Найдите скорость велосипедиста.

Решение. Пусть x – скорость велосипедиста. Тогда

$\left(100 - \frac{4}{3}x\right)$ – расстояние, пройденное «быстрым» автобусом до встречи с велосипедистом;

$\frac{4}{3}$ часа – время до встречи «быстрого» автобуса с велосипедистом;

$(100 - 2x)$ – расстояние, пройденное «медленным» автобусом до встречи с велосипедистом;

2 часа – время до встречи «медленного» автобуса с велосипедистом.

$\frac{12}{7}$ – отношение скоростей автобусов.

$$\frac{100 - \frac{4}{3}x}{\frac{4}{3}} = \frac{12}{7} \cdot \frac{100 - 2x}{2}$$

$$\frac{100 - \frac{4}{3}x}{\frac{4}{3}} = \frac{12}{7} \cdot \frac{100 - 2x}{2} \Leftrightarrow 7 \cdot (300 - 4x) = 24(100 - 2x) \Leftrightarrow 20x = 300 \Leftrightarrow x = 15$$

Ответ: 15 км/ч.

6. При каком наибольшем значении р корни уравнения $x^2 - px - 87 = 0$ являются целыми числами?

Решение. По теореме Виета произведение корней равно (-87). Корни уравнения – целые. . Запишем всевозможные произведения целых чисел, дающие (-87).

$-87 = 1 \cdot (-87) = (-1) \cdot 87 = 3 \cdot (-\,29) = (-3) \cdot 29$. Эти сомножители разных знаков.

По теореме Виета сумма корней равна p. Наибольшее значение p как суммы двух чисел с разным знаком достигается при наибольшем положительном корне и наименьшем по модулю отрицательном. $p = 87 + (-1) = 86$.

Заметим, что 87 и (-1) корни уравнения $x^2 - 86x - 87 = 0$ по обратной теореме Виета.

Ответ: $p = 86$.