Решения вступительной олимпиады. 8 класс. 2018.

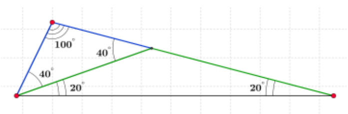
1) Решите неравенство $\left(\frac{x-20}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{9x-5}{3}\right)^2$.

Решение: $\left(\frac{x-20}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{9x-5}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x-20}{2} - \frac{9x-5}{3}\right)\left(\frac{x-20}{2} + \frac{9x-5}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3\cdot(x-20)-2\cdot(9x-5)}{6} \cdot \frac{3\cdot(x-20)+2\cdot(9x-5)}{6} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-15x-50}{6} \cdot \frac{21x-70}{6} \geq 0 \Leftrightarrow (3x+10)\cdot(3x-10) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \leq x \leq \frac{10}{3}$. Ответ: $\left[-\frac{10}{3}; \frac{10}{3}\right]$.

2) Два угла треугольника равны $100°$ и $60°$. Покажите, как его разрезать на два равнобедренных треугольника.

Решение:

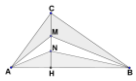


3) В прямоугольном треугольнике ABC катеты AC и BC равны 6 и 8. На высоте CH выбраны точки M и N так, что площадь заштрихованной части равна 19. Найдите MN.

Решение:

1. По теореме Пифагора: $AB = \sqrt{6^2+8^2} = 10$.
2. Найдём площадь $\boldsymbol{\Delta} ABC$ двумя способами: во-первых,

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$;



во-вторых, $S_{ABC} = 19 + S_{AMBN} = 19 + \frac{1}{2} \cdot AH \cdot MN + \frac{1}{2} \cdot BH \cdot MN =$

$= 19 + \frac{1}{2} \cdot MN \cdot (AH + BH) = 19 + \frac{1}{2} \cdot MN \cdot AB = 19 + \frac{1}{2} \cdot MN \cdot 10 = 19 + 5 \cdot$

MN. Далее, $24 = 19 + 5 \cdot MN$.

Откуда $MN = 1$. Ответ: $MN = 1$.

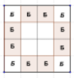
4) В волшебных шахматах все фигуры умеют говорить, причем белые фигуры всегда врут, а черные – всегда говорят правду. На каждой клетке доски 4×4 стоит по фигуре, причем среди них есть и белые и черные. Каждая фигура по очереди говорит: «Среди моих соседей поровну белых и черных фигур». Сколько среди них белых фигур, если соседними называются клетки, имеющие общую сторону?

Решение:

•Рассмотрим фигуры, стоящие в клетках по периметру доски 4х4, но не в углах.

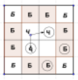
•Они – белые, так как каждая из них имеет нечётное количество соседей и они врут, утверждая: "Среди моих соседей поровну белых и чёрных фигур".

• Далее, фигуры, стоящие в угловых клетках, тоже являются белыми, так как имеют каждая по два соседа, каждый из которых является белой фигурой.



•Теперь рассмотрим фигуры, стоящие в клетках "центрального" квадрата 2х2.

•По условию задачи хотя бы одна чёрная фигура стоит на доске. Так как периметр квадрата занимают только белые фигуры, то хотя бы одну клетку "центрального" квадрата 2х2 занимает чёрная фигура. Рассмотрим такую клетку.



•У любой клетки "центрального" квадрата 2х2 по четыре соседних, две из которых точно занимают белые фигуры. Таким образом, две другие клетки, соседние с рассматриваемой, занимают чёрные фигуры.

•У оставшейся клетки "центрального" квадрата 2х2 на четырёх клетках-соседях находятся две чёрных и две белых фигуры, следовательно, фигура, стоящая в оставшейся клетке, говорит правду, то есть она чёрная.

Ответ: среди фигур на доске 12 белых фигур.

5) При каких значениях параметра a расстояние между корнями уравнения $x^2 - (a+1)x + a = 0$ больше $\sqrt{3}$?

Решение: По обратной теореме Виета корни данного уравнения равны a и 1. Расстояние между корнями равно $|a-1|$. Так как по условию задачи расстояние больше $\sqrt{3}$, получим неравенство: $|a-1| > \sqrt{3}$.

$|a-1| > \sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-1 > \sqrt{3} \\ a-1 < -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > \sqrt{3}+1 \\ a < 1-\sqrt{3} \end{array}\right.$. Ответ: $(-\infty; 1-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}+1; +\infty)$.

6) Винни-Пух и Пятачок сели за стол немного подкрепиться и начали одновременно есть мед из одного горшка, не отвлекаясь на разговоры. Если бы Винни-Пух ел со скоростью Пятачка, то процесс еды длился бы на 4 минуты дольше, а если бы, наоборот, Пятачок ел со скоростью Винни-Пуха – то сократился бы на 1 минуту. За какое время мед из горшка был полностью съеден?

Решение: Пусть Винни-Пух съедает v кг мёда в минуту, а Пятачок – p кг мёда в минуту. Тогда за совместное время t поедания мёда Винни-Пух и Пятачок съедят $[t(v+p)]$ кг мёда. Если бы Винни-Пух ел мёд со скоростью Пятачка, то Винни-Пух и Пятачок съели бы $[(t+4)\cdot 2p]$ кг мёда. Если бы Пятачок ел мёд со скоростью Винни-Пуха, то Винни-Пух и Пятачок съели бы $[(t-1)\cdot 2v]$ кг мёда. Имеем систему уравнений: $\begin{cases} t(v+p) = (t+4)\cdot 2p \ \ (1) \\ t(v+p) = (t-1)\cdot 2v \ \ (2) \end{cases}$.

Из (1) получим $t\cdot(v-p) = 8p$. Из (2) получим $t\cdot(v-p) = 2v$. Тогда $8p = 2v$. Таким образом, Винни-Пух ест мёд в 4 раза быстрее, чем Пятачок. Подставим полученный результат в (1). Получим: $t(4p+p) = (t+4)\cdot 2p \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathrm{t}\cdot 5\mathrm{p} = (t+4)\cdot 2p \Leftrightarrow 3t = 8 \Leftrightarrow t = 2\frac{2}{3}$. Ответ: мёд был съеден за $2\frac{2}{3}$ минуты или за 2 минуты 40 секунд.