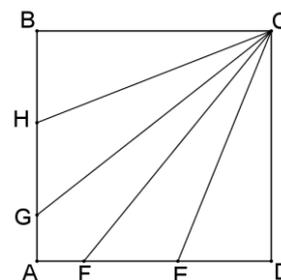


Вступительная олимпиада. 8 класс. 2015 год.

1. Придумайте два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 11.
2. Решите неравенство $(x-4)\sqrt{x^2-7x+10} \geq 0$.
3. Решите уравнение $\frac{1}{|x^2-5x+6|} = \frac{|x-1,5|}{x^2-5x+6}$.
4. Ученики ФТШ ходили в поход. Петя заметил, что 11 дней похода были дождливыми. Оля заметила, что не было такого дня, чтобы дождь был и до, и после обеда, а Костя заметил, что утром не было дождя ровно 16 раз, а вечером не было дождя 11 раз. Сколько дней длился поход?
5. Отрезки CH , CG , CF и CE делят квадрат $ABCD$ на пять частей одинаковой площади. Найдите отношение $FE : AD$.
6. Квадратный трёхчлен $0,5x^2 - 2x - 5a + 1$ имеет два действительных корня, сумма кубов которых меньше 40. Найдите все значения параметра, при которых выполняется это условие.



Решения.

1. Ответ: например, 2899999 и 2900000. Возможны и другие варианты.

$$2. (x-4)\sqrt{x^2-7x+10} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ x^2-7x+10 = 0 \\ x^2-7x+10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x = 2 \\ x = 5 \\ x \in (-\infty; 2] \cup [5; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [5; +\infty) \cup \{2\}.$$

Ответ: $x \in [5; +\infty) \cup \{2\}$.

3. Заметим, что левая часть уравнения всегда больше нуля. Значит, знаменатель правой части должен быть больше нуля. Тогда исходное уравнение при этом ограничении равносильно уравнению $|x-1,5| = 1$, то есть $x = 2,5$ или $x = 0,5$. При $x = 2,5$ знаменатель правой части меньше нуля, при $x = 0,5$ он больше нуля.

Ответ: $x = 0,5$.

4. Ученики ФТШ ходили в поход. Петя заметил, что 11 дней похода были дождливыми. Оля заметила, что не было такого дня, чтобы дождь был и до, и после обеда, а Костя заметил, что утром не было дождя ровно 16 раз, а вечером не было дождя 11 раз. Сколько дней длился поход?

Если сложить количество дождливых вечеров (v_d) с количеством вечеров без дождей (v), то получится общее количество дней в походе (d). Аналогично, если сложить количество дождливых утр (u_d) с количеством недождливых утр (u), то тоже получится общее количество дней. Значит

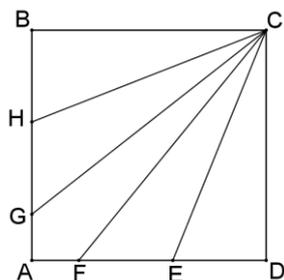
$$v + v_d + u_d + u = 2d.$$

По условию, $v = 11$ (вечера без дождя), $u = 16$ (утра без дождя), и $v_d + u_d = 11$ (утренние и вечерние дожди – это все дожди). Тогда $11 + 11 + 16 = 2d, d = 19$.

Ответ: поход длился 19 дней.

5. $S_{\triangle FCE} = \frac{1}{5} \cdot AD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot FE$, откуда $FE : AD = 2 : 5$.

Ответ $FE : AD = 2 : 5$.



6. Так как у уравнения есть корни, то дискриминант соответствующего уравнения $0,5x^2 - 2x - 5a + 1 = 0$ больше нуля, то есть $2^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot (-5a + 1) > 0$, откуда $a > -\frac{1}{5}$.

Сумма кубов корней m и n равна $m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 + n^2 - mn) = (m + n)((m + n)^2 - 3mn)$.

Так как по теореме Виета $m + n = 4, mn = \frac{-5a+1}{0,5} = -10a + 2$, получаем условие

$$4 \cdot (16 - 3(-10a + 2)) < 40, \text{ то есть } a < 0.$$

Ответ: $a \in (-\frac{1}{5}; 0)$.