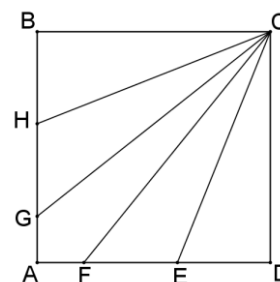


## Вступительная олимпиада. 8 класс. 2015 год.

1. Придумайте два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 11.
2. Решите неравенство  $(x-4)\sqrt{x^2-7x+10} \geq 0$ .
3. Решите уравнение  $\frac{1}{|x^2-5x+6|} = \frac{|x-1,5|}{x^2-5x+6}$ .
4. Ученики ФТШ ходили в поход. Петя заметил, что 11 дней похода были дождливыми. Оля заметила, что не было такого дня, чтобы дождь был и до, и после обеда, а Костя заметил, что утром не было дождя ровно 16 раз, а вечером не было дождя 11 раз. Сколько дней длился поход?
5. Отрезки  $CH$ ,  $CG$ ,  $CF$  и  $CE$  делят квадрат  $ABCD$  на пять частей одинаковой площади. Найдите отношение  $FE : AD$ .
6. Квадратный трёхчлен  $0,5x^2 - 2x - 5a + 1$  имеет два действительных корня, сумма кубов которых меньше 40. Найдите все значения параметра, при которых выполняется это условие.



### Решения.

1. Ответ: например, 2899999 и 2900000. Возможны и другие варианты.

$$2. (x-4)\sqrt{x^2-7x+10} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ x^2-7x+10 = 0 \\ x^2-7x+10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x = 2 \\ x = 5 \\ x \in (-\infty; 2] \cup [5; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [5; +\infty) \cup \{2\}.$$

Ответ:  $x \in [5; +\infty) \cup \{2\}$ .

3. Заметим, что левая часть уравнения всегда больше нуля. Значит, знаменатель правой части должен быть больше нуля. Тогда исходное уравнение при этом ограничении равносильно уравнению  $|x-1,5| = 1$ , то есть  $x = 2,5$  или  $x = 0,5$ . При  $x = 2,5$  знаменатель правой части меньше нуля, при  $x = 0,5$  он больше нуля.

Ответ:  $x = 0,5$ .

4. Ученики ФТШ ходили в поход. Петя заметил, что 11 дней похода были дождливыми. Оля заметила, что не было такого дня, чтобы дождь был и до, и после обеда, а Костя заметил, что утром не было дождя ровно 16 раз, а вечером не было дождя 11 раз. Сколько дней длился поход?

Если сложить количество дождливых вечеров ( $v_d$ ) с количеством вечеров без дождей ( $v$ ), то получится общее количество дней в походе ( $d$ ). Аналогично, если сложить количество дождливых утр ( $u_d$ ) с количеством недождливых утр ( $u$ ), то тоже получится общее количество дней. Значит

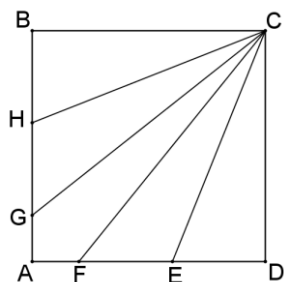
$$v + v_d + u_d + u = 2d.$$

По условию,  $v = 11$  (вечера без дождя),  $u = 16$  (утра без дождя), и  $v_d + u_d = 11$  (утренние и вечерние дожди – это все дожди). Тогда  $11 + 11 + 16 = 2d, d = 19$ .

Ответ: поход длился 19 дней.

5.  $S_{\triangle FCE} = \frac{1}{5} \cdot AD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot FE$ , откуда  $FE : AD = 2 : 5$ .

Ответ  $FE : AD = 2 : 5$ .



6. Так как у уравнения есть корни, то дискриминант соответствующего уравнения  $0,5x^2 - 2x - 5a + 1 = 0$  больше нуля, то есть  $2^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot (-5a + 1) > 0$ , откуда  $a > -\frac{1}{5}$ .

Сумма кубов корней  $m$  и  $n$  равна  $m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 + n^2 - mn) = (m + n)((m + n)^2 - 3mn)$ .

Так как по теореме Виета  $m + n = 4, mn = \frac{-5a+1}{0,5} = -10a + 2$ , получаем условие

$$4 \cdot (16 - 3(-10a + 2)) < 40, \text{ то есть } a < 0.$$

Ответ:  $a \in (-\frac{1}{5}; 0)$ .