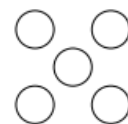


Вступительная олимпиада. 7 класс. 2015 год.

1. Впишите в каждый кружочек по цифре, отличной от нуля, так, чтобы сумма цифр в двух верхних кружочках была в 7 раз меньше суммы трех остальных цифр, а сумма цифр в двух левых кружочках – в 5 раз меньше суммы трех остальных цифр.



2. Ученики ФТШ ходили в поход. Петя заметил, что 11 дней похода были дождливыми. Оля заметила, что не было такого дня, чтобы дождь был и до, и после обеда, а Костя заметил, что утром не было дождя ровно 16 раз, а вечером не было дождя 11 раз. Сколько дней длился поход?

3. В треугольнике ABC $\angle A = 20^\circ$, $\angle B = 25^\circ$. Из точки B опущен перпендикуляр BK на прямую AC . Найдите KC , если $BK = 5$.

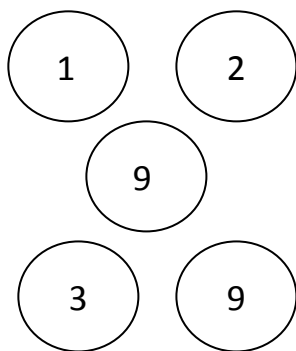
4. Коробка содержит 900 карт, пронумерованных от 100 до 999. Павел вынимает карты из коробки случайным образом и вычисляет для каждой карты сумму написанных на ней цифр. Сколько карт нужно вытащить Павлу, чтобы быть уверенным, что среди них найдется хотя бы три карты с одинаковой суммой цифр?

5. Числа a , b , c и d таковы, что $a+b=c+d$ и $a^2+b^2=c^2+d^2$. Верно ли, что $a^3+b^3=c^3+d^3$?

6. Вася выписал все трехзначные числа и вычислил в каждом числе произведение его цифр, а затем сложил все полученные произведения. Какое число у него получилось?

Решения.

1. **Ответ:**



2. Если сложить количество дождливых вечеров (v_d) с количеством вечеров без дождей (v), то получится общее количество дней в походе (d). Аналогично, если сложить количество дождливых утр (u_d) с количеством недождливых утр (u), то тоже получится общее количество дней. Значит

$$v + v_d + u_d + u = 2d.$$

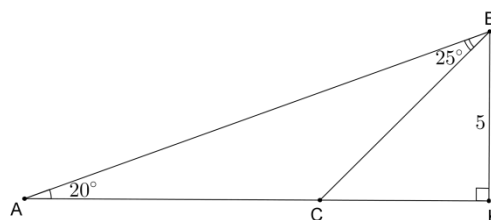
По условию $v = 11$ (вечера без дождя), $u = 16$ (утра без дождя), и $v_d + u_d = 11$ (утренние и вечерние дожди – это все дожди). Тогда $11 + 11 + 16 = 2d$, $d = 19$.

Ответ: поход длился 19 дней.

3. Заметим, что треугольник ABC – тупоугольный с углом ACB , равным 135° . Основание высоты BK – точка K – принадлежит прямой AC , но не принадлежит отрезку AC (см. рисунок). Угол BCK равен $20^\circ + 25^\circ = 45^\circ$ (по теореме о внешнем угле). Тогда угол

СВК тоже равен $90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Таким образом получаем, что треугольник СВК – равнобедренный, а значит $BK=KC=5$.

Ответ: $KC=5$.



4. Суммы цифр номеров карт могут меняться от 1 (для номера 100) до 27 (для номера 999). Заметим, что среди имеющихся 900 карт сумму 1 имеет лишь карта 100, сумму 27 – лишь карта 999, а для всех остальных сумм (от 2 до 26) можно найти не менее трёх карт, сумма цифр номеров которых равна этой сумме (например, сумму 2 имеют карты 101, 110 и 200).

Предположим, что Павел вынул сначала 27 карт и обнаружил, что суммы цифр их номеров имеют значения от 1 до 27. Если Павел вынет ещё 25 карт то может случиться, что он вытянул карты с суммами цифр номеров от 2 до 26 и у него по-прежнему нет трех карт с одинаковой суммой номеров. Таким образом, 52 карт Павлу может не хватить.

В то же время, если он вытянет 53 карты, то среди них обязательно найдутся три с одинаковой суммой. Докажем это: предположим, что среди 53 карт нет трех с одинаковой суммой. Тогда всего карт не больше чем 1 (карта 100) + $2 \cdot 25$ (25 карт с суммами от 2 до 26) + 1 (карта 999) = 52, а у нас 53 карты. Противоречие. Значит, наше предположение, что среди 53 карт нет трех с одинаковой суммой неверно, что и требовалось доказать.

Ответ: 53 карты.

5. Так как $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, то $(a + b)^2 - 2ab = (c + d)^2 - 2cd$ и, следовательно, $-2ab = -2cd$, а значит $ab = cd$. Тогда $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (c + d)(c^2 - cd + d^2) = c^3 + d^3$.

Ответ: равенство верно.

6. Любое трехзначное число имеет вид \overline{abc} , где a – любая цифра от 1 до 9, а b и c – любые цифры от 0 до 9. Рассмотрим все возможные значения произведения abc . Их сумму удобно записать в таком виде: $(1+2+\dots+9)(0+1+2+\dots+9)(0+1+2+\dots+9)$.

Действительно, при раскрытии скобок получится 900 слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение цифр одного из девяти сот трехзначных чисел. Так как сумма чисел в каждой скобке равна 45, то искомое число равно 45^3 .

Ответ: 45^3