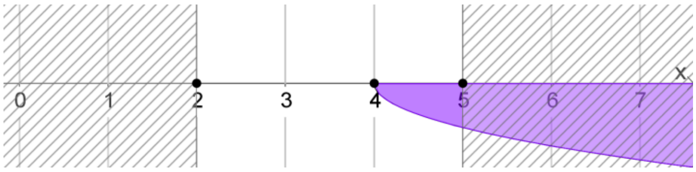
Вступительная олимпиада. 9 класс. 2015 год.

1. Решите неравенство $(x-4)\sqrt{x^2-7x+10} \geq 0$.

Это неравенство имеет смысл только если подкоренное выражение не меньше 0:

$$x^2-7x+10 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (x-5)(x-2) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x \geq 5 \\ x \leq 2 \end{array}\right.$$

Заметим, что во всех точках области определения неравенства выражение $\sqrt{x^2-7x+10}$ не меньше 0, т.е. на **знак** произведения влияет только второй множитель. Для того чтобы произведение было больше 0 (имело знак «+») необходимо, чтобы множитель $(x-4)$ был больше 0, а для того, чтобы произведение было равно 0 необходимо, чтобы хотя бы один из множителей был равен 0. Отметим на числовой оси подходящие под эти условия точки, учитывая область определения неравенства:



По рисунку определяем, что неравенству удовлетворяют все $x \geq 5$ и точка $x = 2$.

Ответ:$\{2\} \cup [5;\ +\infty)$.

2. Решите уравнение $\frac{x-3}{(x-1)(x-4)} + \frac{(x-1)(x-4)}{x-3} = \frac{5}{2}$.

Сделаем замену переменной: $t = \frac{x-3}{(x-1)(x-4)}$. Тогда

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{2t^2-5t+2}{t} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} 2t^2-5t+2=0 \\ t \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=2 & (1) \\ t=\frac{1}{2} & (2) \end{array}\right.$$

Теперь вернемся к исходной переменной:

$$(1)\colon \frac{x-3}{(x-1)(x-4)} = 2 \Leftrightarrow \frac{x-3-2(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-4)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-3-2x^2+10x-8}{(x-1)(x-4)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2+11x-11}{(x-1)(x-4)} = 0;\ \ D = 11^2-4\cdot 2\cdot 11 = 11\cdot 3 = 33; x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

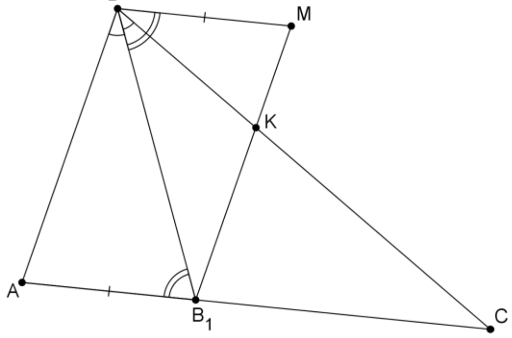
$$(1)\colon \frac{x-3}{(x-1)(x-4)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2(x-3)-(x-1)(x-4)}{2(x-1)(x-4)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-6-x^2+5x-4}{2(x-1)(x-4)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+7x-10}{(x-1)(x-4)} = 0;\ \ x_{3,4} = 2; 5.$$

Ответ:$\left\{\frac{11-\sqrt{33}}{4}; 2; \frac{11+\sqrt{33}}{4}; 5\right\}$.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Пусть M- такая точка плоскости, что отрезок MB_1 пересекает сторону BC в точке K, $BM = AB_1, \angle MBB_1 = \angle BB_1A$. Докажите, что $BK = KB_1$.

Углы $\angle MBB_1$и $\angle BB_1A$ являются накрест лежащими при прямых BM и AC и секущей BB_1. Если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны, т.е. $BM \parallel AB_1$. Кроме того, по условию $BM = AB_1$, а значит $ABMB_1$ - параллелограмм (по признаку).



В параллелограмме противоположные стороны параллельны, значит $AB \parallel MB_1$, и значит накрест лежащие углы при этих прямых и секущей BB_1 равны: $\angle MB_1B = \angle B_1BA$. Кроме того, $\angle KBB_1 = \angle B_1BA$ (BB_1 - биссектриса), тогда $\angle KB_1B = \angle KBB_1$, следовательно ΔKBB_1–равнобедренный, причем $KB = KB_1$. **ч.т.д.**

4. Ученики ФТШ ходили в поход. Петя заметил, что 11 дней похода были дождливыми. Оля заметила, что не было такого дня, чтобы дождь был и до, и после обеда, а Костя заметил, что утром не было дождя ровно 16 раз, а вечером не было дождя 11 раз. Сколько дней длился поход?

Если сложить количество дождливых вечеров (v_d) с количеством вечеров без дождей (v), то получится общее количество дней в походе (d). Аналогично, если сложить количество дождливых утр (u_d) с количеством недождливых утр (u), то тоже получится общее количество дней. Значит

$$v + v_d + u_d + u = 2d.$$

По условию, $v = 11$ (вечера без дождя), $u = 16$ (утра без дождя), и $v_d + u_d = 11$ (утренние и вечерние дожди– это все дожди). Тогда $11 + 11 + 16 = 2d, d = 19$.

Ответ: поход длился 19 дней.

5. Найдите хотя бы одну тройку различных натуральных чисел n, m и t,таких, что верно равенство $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2015}$.

Вспомним, что $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$. Разделим это равенство на 2015: $\frac{1}{4030} + \frac{1}{6045} + \frac{1}{12090} = \frac{1}{2015}$.

Ответ:$n = 4030, m = 6045, t = 12090$.

6. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{ax^2 + 5x + 11}{x^2 + 3x + 10} > 1$ выполняется для всех значений переменной x, кроме одного?

Приведем это неравенство к более удобному виду:

$$\frac{ax^2 + 5x + 11 - x^2 - 3x - 10}{x^2 + 3x + 10} > 0 \Leftrightarrow \frac{(a-1)x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 10} > 0.$$

Вычислим дискриминант трехчлена в знаменателе $D = 9 - 40 = -31$. У этого трехчлена нет корней, а старший коэффициент больше 0, значит знаменатель нашей дроби всегда положителен. Таким образом, нам необходимо, чтобы неравенство $(a-1)x^2 + 2x + 1 > 0$ было выполнено для всех x кроме одного.

Если $a = 1$, то у нас получается линейное неравенство $2x + 1 > 0$, которое выполнено при всех $x > -0.5$, а это нам не подходит.

Если $a \neq 1$, то мы имеем дело с квадратным неравенством. Графиком квадратичной функции является парабола; нам нужно, чтобы все точки этой параболы, кроме одной, находились выше оси OX, т.е. чтобы вершина параболы лежала на оси OX, а ветви параболы были направлены вверх. Тогда получаем следующие условия:

$$\begin{cases} a - 1 > 0 \\ D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 4 - 4(a-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Ответ:$a = 2$.