Вступительная олимпиада. 8 класс. 2014. Решения.

1. Сравните $\left(2+\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{\left(4\sqrt{5}-11\right)^2}$ и $\sqrt{396}$.

Решение:

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{\left(4\sqrt{5}-11\right)^2}=4+4\sqrt{5}+5+\left|4\sqrt{5}-11\right|=9+4\sqrt{5}+11-4\sqrt{5}=20.$$

$20=\sqrt{400}$. Так как $400>396$, то и $\sqrt{400}>\sqrt{396}$. Значит, $\left(2+\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{\left(4\sqrt{5}-11\right)^2}>\sqrt{396}$.

Ответ: первое число больше.

2. Решите неравенство $\frac{|x-1|}{x-2}<2$.

Первое решение:

$$\frac{|x-1|}{x-2}<2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1\ge 0 \\ \dfrac{x-1}{x-2}<2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1<0 \\ \dfrac{1-x}{x-2}<2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 1 \\ \dfrac{3-x}{x-2}<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ 1-x>2(x-2) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<2 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ x<\dfrac{5}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\le x<2 \\ x>3 \\ x<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<2 \end{array}\right..$$

Второе решение:

Если $x<2$, то он является решением, так как в этом случае левая часть отрицательна и, значит, меньше 2.

Число $x=2$ не входит в область определения и решением не является.

Если $x>2$, то можно раскрыть модуль ($|x-1|=x-1$) и домножить неравенство на (положительное!) число $x-2$. Получим равносильное неравенство $x-1<2(x-2)\Leftrightarrow x>3$.

Ответ: $x<2$, $x>3$.

3. Число $\frac{1}{42}$ разложили в бесконечную десятичную дробь. Затем вычеркнули 2014-ю цифру после запятой, а все цифры, стоящие справа от вычеркнутой цифры, сдвинули на 1 влево. Какое число больше: новое или первоначальное?

Решение. При делении получаем периодическую дробь $\frac{1}{42}=0.0(238095)$:

```
_1, 0 0 0 0 0 0 0 | 4 2
      8 4         |----------------------
    -----         | 0, 0 2 3 8 0 9 5…
   _  1 6 0       |
      1 2 6
      -----
     _  3 4 0
        3 3 6
        -----
       _  4 0 0
          3 7 8
          -----
           _2 2 0
            2 1 0
            -----
           _  1 0 0
                8 4
```

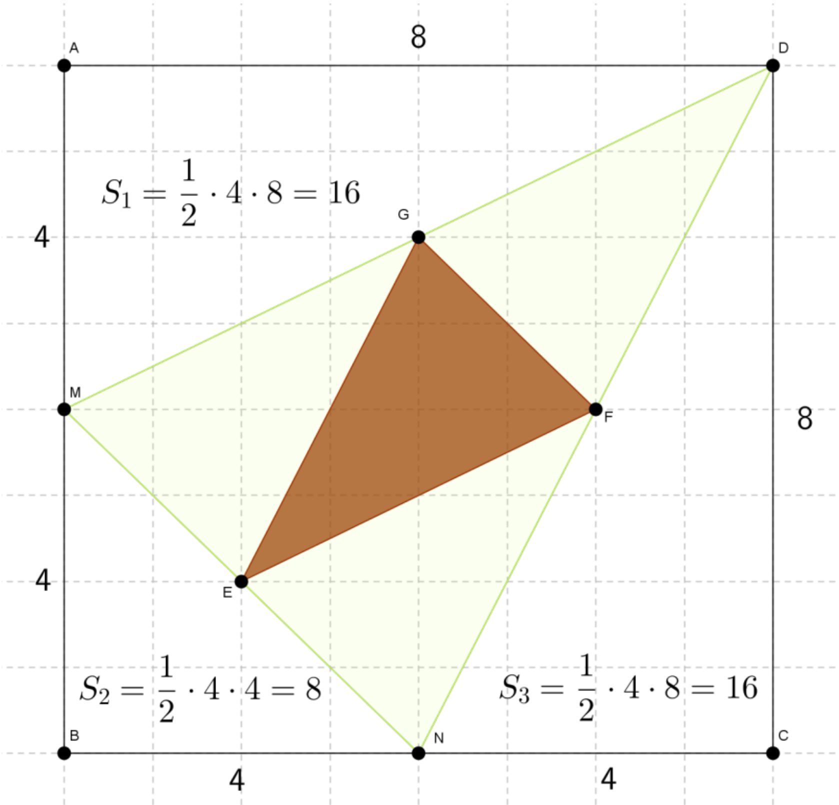
Длина периода составляет 6 разрядов, при этом $2014 = 6 \cdot 335 + 4 = 1(\text{первый 0 после запятой}) + 6 \cdot 335(335 \text{ периодов}) + 3(3 \text{ цифры периода})$. Значит, на 2014 месте стоит цифра 8. После вычеркивания и сдвигания все первые 2013 цифр после запятой остались прежними, а на 2014 месте цифра уменьшилась – стала 0. Значит, число уменьшилось.

Ответ: первоначальное число больше.

4. В квадрате ABCD точка M – середина AB, точка N – середина BC, точка E – середина MN, точка F – середина ND, точка G – середина MD. Найдите площадь треугольника EFG, если сторона квадрата равна 8.

Решение: Коричневый треугольник образован средними линиями зеленого. Значит, коричневая площадь составляет четверть площади зеленого (то есть треугольника MND). А площадь зеленого равна разности площади квадрата и (S_1+S_2+S_3) (смотри рисунок). Итак, площадь «зеленая» (площадь треугольника MND) равна $8 \cdot 8 - 16 - 16 - 8 = 24$. Тогда «коричневая» площадь $\frac{24}{4} = 6$.

Ответ: Искомая площадь 6.



5. а) У Кости и Леши есть по девять одинаковых карточек с цифрами от 1 до 9. Леша выложил свои карточки в ряд по порядку (1, 2, 3, …), а Костя выкладывает свои карточки под Лешиными так, чтобы в каждом столбике сумма чисел являлась точным квадратом (например, если под Лешиной карточкой «1» положить «3», то $1 + 3 = 4 = 2^2$). Удастся ли Косте выложить все свои карточки?

Решение. а) Да, удастся:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	2	6	5	4	3	9	1	7

б) Удастся ли Косте выложить свои карточки, если у каждого из них есть по 11 карточек с числами от 1 до 11?

Решение. б) Предположим, что Косте это удалось. Под карточкой с числом 11 лежит одна из карточек с числами от 1 до 11, а значит, сумма чисел в этом столбике находится в пределах от 12 до 22. В этом промежутке есть всего один точный квадрат – это число 16, значит, под карточкой с числом 11 Костя положил карточку с числом 5 ($16 - 11 = 5$).

Под карточкой с числом 4 тоже лежит одна из карточек с числами от 1 до 11, а значит, сумма чисел в этом столбике находится в пределах от 5 до 15. В этом промежутке тоже всего один точный квадрат – это число 9, но чтобы получить в этом столбике 9, нужно положить карточку «5», а она уже занята. Получаем противоречие, а значит в этот раз Косте не удастся выложить свои карточки.

Ответ: а) удастся; б) не удастся.