

Вступительная олимпиада. 7 класс. 2014. Решения.

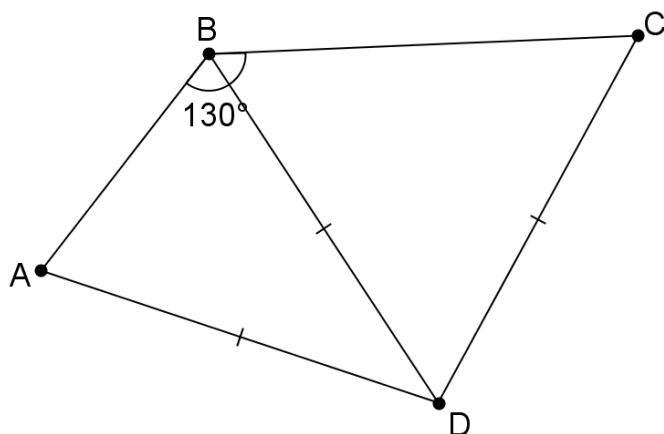
1. Косте с Лешей подарили пирог с капустой и торт «Наполеон». Леша съедает пирог за 2 минуты, а торт – за 3 минуты. Костя съедает пирог за 5 минут, а торт – за 4 минуты. Удастся ли им вместе съесть всю еду за 3 минуты?

Решение. Покажем, что мальчикам удастся съесть пирог и торт за 3 минуты, построив пример. Дадим вначале каждому из мальчиков есть то, что он ест быстрее: Косте – торт, а Леше – пирог. Через 2 минуты Леша съест весь пирог, а Костя съест полторта. За оставшуюся минуту они могут съесть $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ торта, а у нас осталось меньше, всего $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$ торта. Таким образом, они управятся даже быстрее, чем нужно.

Ответ: удастся.

2. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Известно, что $BD = AD = CD$. Найдите $\angle ADC$, если известно, что $\angle ABC = 130^\circ$.

Решение.



$\triangle ABD$ – равнобедренный, значит $\angle BAD = \angle ABD$, а $\angle ADB = 180^\circ - \angle BAD - \angle ABD = 180^\circ - 2\angle ABD$.

Аналогично, рассмотрев $\triangle BCD$, получаем, что $\angle CDB = 180^\circ - 2\angle CBD$.

Тогда $\angle ADC = \angle ADB + \angle CDB = 180^\circ - 2\angle ABD + 180^\circ - 2\angle CBD = 360^\circ - 2(\angle ABD + \angle CBD) = 360^\circ - 2\angle ABC = 360^\circ - 2 \cdot 130^\circ = 100^\circ$.

Ответ: 100° .

3. Какое из чисел больше: 2 или $29\frac{13}{17} \cdot 30\frac{13}{17} - 28\frac{13}{17} \cdot 31\frac{13}{17}$?

Решение. Введем обозначение: $a = 29\frac{13}{17}$. Тогда $28\frac{13}{17} = a - 1$; $30\frac{13}{17} = a + 1$ и $31\frac{13}{17} = a + 2$.

2. Тогда «страшное» выражение с дробями преобразуется в $a(a + 1) - (a - 1)(a + 2) = a^2 + a - (a^2 + a - 2) = a^2 + a - a^2 - a + 2 = 2$.

Получается, что оба числа равны.

Ответ: числа равны.

4. Найдите значение выражения $x^3 + y^3$, если $xy = 13$ и $x^2 + y^2 = 38$.

Решение. Воспользуемся формулой $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Мы можем сразу посчитать, что получится во второй скобке: $(x^2 + y^2 - xy) = 38 - 13 = 25$. Для того, чтобы найти значение первой скобки, заметим, что

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 38 + 2 \cdot 13 = 64$$

Если квадрат числа равен 64, то само число равно 8 или -8 . Получаем, что

$$x^3 + y^3 = 8 \cdot 25 = 200 \text{ или } x^3 + y^3 = -8 \cdot 25 = -200$$

Ответ: 200 или -200 .

5. а) У Валеры и Юры есть по девять одинаковых карточек с цифрами от 1 до 9. Юра выложил свои карточки в ряд по порядку (1, 2, 3, ...), а Валера выкладывает свои карточки под Юриными так, чтобы в каждом столбике сумма чисел являлась точным квадратом (например, если под Юриной карточкой «1» положить «3», то $1 + 3 = 4 = 2^2$). Удастся ли Валере выложить все свои карточки?

Решение. а) Да, удастся:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 8 | 2 | 6 | 5 | 4 | 3 | 9 | 1 | 7 |

б) Удастся ли Валере выложить свои карточки, если у каждого из них есть по 11 карточек с числами от 1 до 11?

Решение. б) Предположим, что Валере это удалось. Под карточкой с числом 11 лежит одна из карточек с числами от 1 до 11, а значит, сумма чисел в этом столбике находится в пределах от 12 до 22. В этом промежутке есть всего один точный квадрат – это число 16, значит, под карточкой с числом 11 Валера положил карточку с числом 5 ($16 - 11 = 5$).

Под карточкой с числом 4 тоже лежит одна из карточек с числами от 1 до 11, а значит, сумма чисел в этом столбике находится в пределах от 5 до 15. В этом промежутке тоже всего один точный квадрат – это число 9, но чтобы получить в этом столбике 9, нужно положить карточку «5», а она уже занята. Получаем противоречие, а значит в этот раз Валере не удастся выложить свои карточки.

Ответ: а) удастся; б) не удастся.