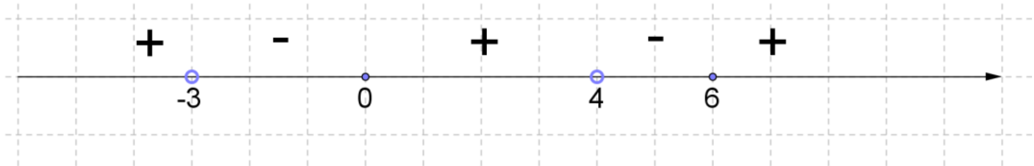
Вступительная олимпиада. 9 класс. 2014. Решения.

1. Решите неравенство $\frac{5x-12}{x^2-x-12} \le 1$.

Решение. $\frac{5x-12}{x^2-x-12} \le 1 \Leftrightarrow \frac{5x-12-x^2+x+12}{x^2-x-12} \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-6x}{x^2-x-12} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-6)}{(x-4)(x+3)} \ge 0$



Ответ: $(-\infty; -3) \cup [0; 4) \cup [6; +\infty)$.

2. В турнире по волейболу (ничьих не бывает) каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Известно, что ровно 25% команд не выиграли ни одного матча. Сколько команд участвовали в турнире? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Решение: Не может быть двух команд, которые не выиграли ни одного матча (ведь они должны были играть друг с другом!). Значит, такая команда ровно одна и она составляет 25%. Значит, всего команд 4.

Ответ: 4 команды.

3. Решите уравнение. $\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x}}\right)\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{x}}\right)(\boldsymbol{x}+\mathbf{4})(\boldsymbol{x}+\mathbf{6})=\mathbf{12}$

Решение. Преобразуем уравнение

$\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)(x+4)(x+6)=12 \Leftrightarrow \left(\left(1+\frac{3}{x}\right)(x+4)\right)\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)(x+6)\right)=12 \Leftrightarrow$

$\left(x+\frac{12}{x}+7\right)\left(x+\frac{12}{x}+8\right)=12$

Сделаем замену переменной: $t = x + \frac{12}{x} + 7$.

Получим уравнение

$$t(t+1) = 12$$

Его корни 3 и (-4). Обратная замена приводит к уравнениям

$x + \frac{12}{x} + 7 = 3$ и $x + \frac{12}{x} + 7 = -4$.

Первое уравнение приводится к равносильному уравнению $x^2 + 4x + 12 = 0$ и у него нет корней.

Второе уравнение приводится к равносильному уравнению $x^2 + 11x + 12 = 0$ - его корни $x = \frac{-11 \pm \sqrt{73}}{2}$.

Ответ: $\frac{-11 \pm \sqrt{73}}{2}$.

4. Число $\frac{1}{42}$ разложили в бесконечную десятичную дробь. Затем вычеркнули 2014-ю цифру после запятой, а все цифры, стоящие справа от вычеркнутой цифры, сдвинули на 1 влево. Какое число больше: новое или первоначальное?

При делении получаем периодическую дробь $\frac{1}{42} = 0.0(238095)$.

Длина периода составляет 6 разрядов, при этом $2014 = 6 \cdot 335 + 4 =$

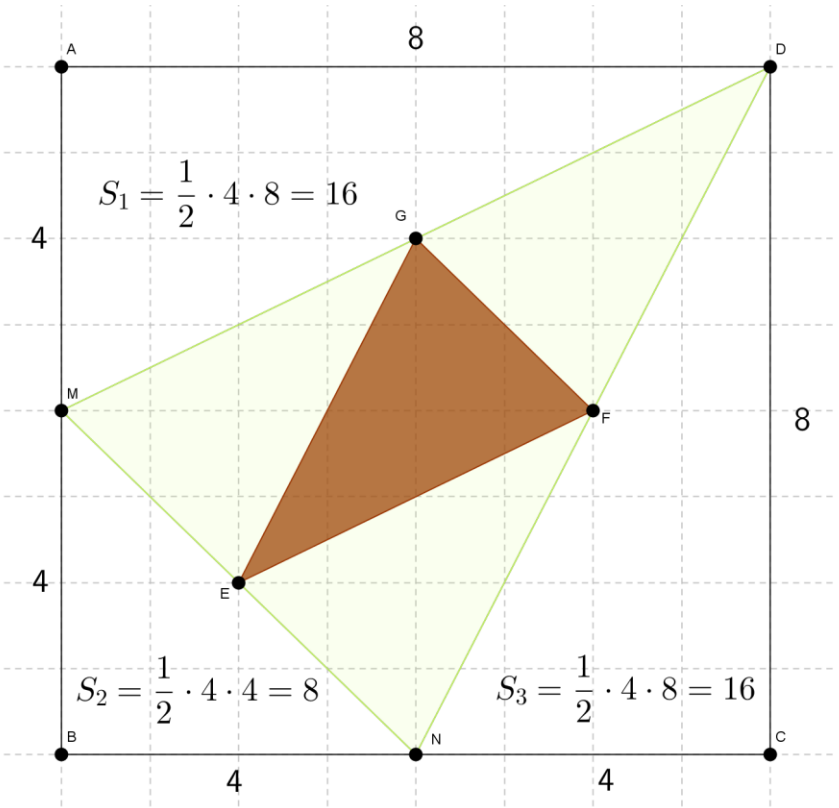
$1(\text{первый 0 после запятой}) + 6 \cdot 335(335\ \text{периодов}) + 3(3\ \text{цифры периода})$. Значит, на 2014 месте стоит цифра 8. После вычеркивания и сдвигания все первые 2013 цифр после запятой остались прежними, а на 2014 месте цифра уменьшилась – стала 0. Значит, число уменьшилось.

Ответ: первоначальное число больше.

5. В квадрате ABCD точка M – середина AB, точка N – середина BC, точка E – середина MN, точка F – середина ND, точка G – середина MD. Найдите площадь треугольника EFG, если сторона квадрата равна 8.

Решение: Коричневый треугольник образован средними линиями зеленого. Значит, коричневая площадь составляет четверть площади зеленого (то есть треугольника MND). А площадь зеленого равна разности площади квадрата и ($S_1+S_2+S_3$) (смотри рисунок). Итак, площадь «зеленая» (площадь треугольника MND) равна $8\cdot8-16-16-8=24$. Тогда «коричневая» площадь $\frac{24}{4}=6$.

Ответ: Искомая площадь 6.



6. Корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ с неизвестными коэффициентами равны 2 и 3. Найдите корни уравнения $cx^2+bx+a=0$.

Первое решение. Так как $x=0$ не является корнем уравнения $cx^2+bx+a=0$, то можем в этом уравнении обе части разделить на x^2 и получить равносильное уравнение (то есть с теми же корнями): $c+b\left(\frac{1}{x}\right)+a\left(\frac{1}{x}\right)^2=0$. Сделав замену переменной $\frac{1}{x}=t$, получим уравнение $at^2+bt+c=0$, корнями которого по условию являются числа 2 и 3. Отсюда у уравнения $c+b\left(\frac{1}{x}\right)+a\left(\frac{1}{x}\right)^2=0$ (а значит, и у уравнения $cx^2+bx+a=0$) корни равны $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.

Второе решение. По теореме Виета, коэффициенты первого уравнения связаны соотношениями $\frac{b}{a}=-5$, $\frac{c}{a}=6$. Отсюда $\frac{b}{c}=-\frac{5}{6}$, $\frac{a}{c}=\frac{1}{6}$.

Получаем, $cx^2+bx+a=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ или $x=\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.