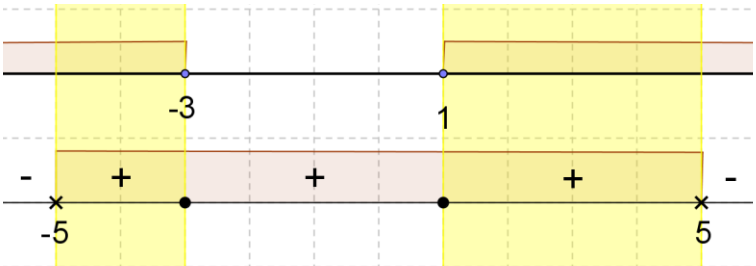
Решения задач вступительной олимпиады. 9 класс. 2012 год.

1. Решите неравенство $\frac{\sqrt{2x-3+x^2}}{25-x^2} \geq 0$.

Решение.

Неравенство выполняется тогда и только тогда, когда $\begin{cases} 2x-3+x^2 \geq 0 \\ 25-x^2 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2x-3+x^2 = 0 \\ 25-x^2 \neq 0 \end{cases}$.

Решение первой системы можно увидеть на рисунке:



Решение второй системы ничего не добавляет к ответу.

Ответ: $x \in (-5; -3] \cup [1;5)$.

2. Расположите в порядке возрастания числа: $9\sqrt{3}-3\sqrt{27}$, $2\sqrt{19}$, $5\sqrt{3}$, $\sqrt{7}-4$.

Решение. Заметим, что $9\sqrt{3}-3\sqrt{27} = 9\sqrt{3}-9\sqrt{3} = 0$.

Также $\sqrt{7} < \sqrt{16} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{7} < 4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{7}-4 < 0$.

$2\sqrt{19} = \sqrt{4 \cdot 19} = \sqrt{76}$; $5\sqrt{3} = \sqrt{75}; \sqrt{76} > \sqrt{75} > 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{19} > 5\sqrt{3} > 0$. Итого получаем

Ответ: $\sqrt{7}-4 < 9\sqrt{3}-3\sqrt{27} < 5\sqrt{3} < 2\sqrt{19}$.

3. Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится на 10, равно 1000. Найдите сумму этих чисел (приведите все возможные варианты).

Решение. Раз произведение данных чисел равно 1000, то в их разложение на простые множители могут входить только 2 и 5, причем не одновременно (иначе число будет делиться на 10). Это означает, что одно из чисел равно 5^3, а второе 2^3, и тогда их сумма равна $125+8=133$.

Ответ: 133.

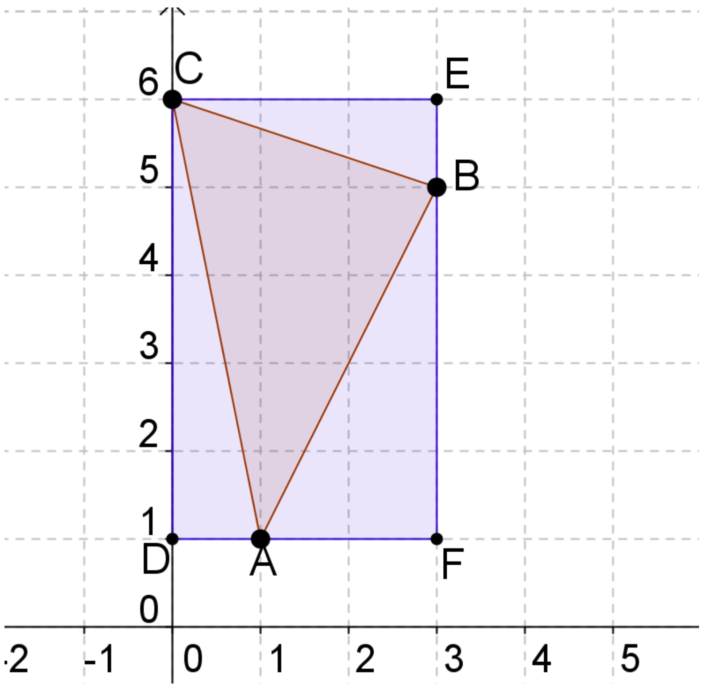
4. Дорога от дома до школы занимает у Пети 20 мин. (Петя всегда идет с постоянной скоростью). Однажды по дороге в школу он вспомнил, что забыл дома ручку. Если теперь он продолжит свой путь с той же скоростью, то придет в школу за 3 мин до звонка, а если вернется домой за ручкой, то, идя с той же скоростью, опоздает к началу урока на 7 мин. Какую часть пути он прошел до того, как вспомнил о ручке?

Решение. Обозначим за x время (в минутах), которое потребовалось Пете для того, чтобы вспомнить о ручке. Если Петя будет возвращаться за ручкой, то придет в школу на 10 минут позже, чем если бы он не возвращался (3 мин до звонка + 7 мин после звонка) или, что то же самое, на $2x$ минут позже (ему придется потратить два раза по x минут -- на путь до дома и обратно до точки просветления). Таким образом, $2x = 10; x = 5$. Весь путь занимает 20 мин, а вспомнил он о ручке через 5 мин, значит прошел к этому времени $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ пути.

Ответ: $\frac{1}{4}$ пути.

5. На координатной плоскости отмечены точки A(1,1), B(3,5) и C(0,6). Найдите площадь треугольника ABC.

Решение.



Заметим, что

$S_{ABC} = S_{DCEF} - S_{DCA} - S_{CEB} - S_{BFA} =$

$= 5 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 =$

$= 15 - 2{,}5 - 1{,}5 - 4 = 7.$

Ответ: $S_{ABC} = 7$.

6. Найдите наименьшее значение выражения $x^2 - 2xy + 2y^2 + 1$. При каких значениях переменных x и y оно достигается?

Решение. $x^2 - 2xy + 2y^2 + 1 = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 + 1 = (x-y)^2 + y^2 + 1 \geq 1$, так как квадраты неотрицательны. При этом при $x = y = 0$ (когда оба квадрата равны 0) значение выражения как раз равно 1.

Ответ: наименьшее значение выражения равно 1, оно достигается при $x = y = 0$.