Решения задач вступительной олимпиады. 8 класс. 2012 год.

1. Расположите в порядке возрастания числа: $9\sqrt{3}-3\sqrt{27},\ 2\sqrt{19},\ 5\sqrt{3},\ \sqrt{7}-4$.

Решение. Заметим, что $9\sqrt{3}-3\sqrt{27}=9\sqrt{3}-9\sqrt{3}=0$.

Также $\sqrt{7}<\sqrt{16}\ \Rightarrow\ \sqrt{7}<4\ \Rightarrow\ \sqrt{7}-4<0$.

$2\sqrt{19}=\sqrt{4\cdot 19}=\sqrt{76};\ \ 5\sqrt{3}=\sqrt{75}; \sqrt{76}>\sqrt{75}>0\ \ \Rightarrow\ \ 2\sqrt{19}>5\sqrt{3}>0$. Итого получаем

Ответ: $\sqrt{7}-4<9\sqrt{3}-3\sqrt{27}<5\sqrt{3}<2\sqrt{19}$.

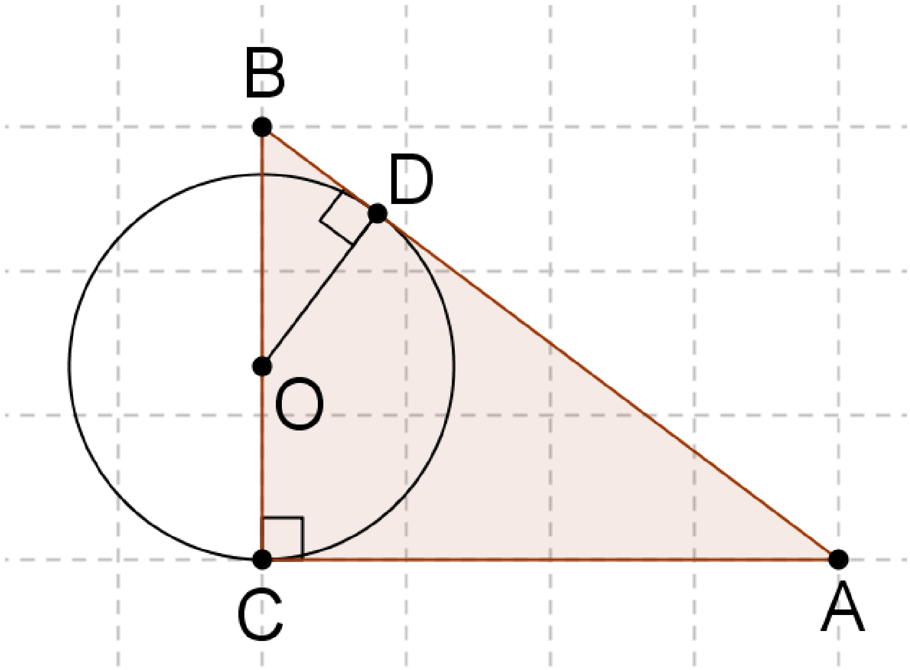
2. Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится на 10, равно 1000. Найдите сумму этих чисел (приведите все возможные варианты).

Решение. Раз произведение данных чисел равно 1000, то в их разложение на простые множители могут входить только 2 и 5, причем не одновременно (иначе число будет делиться на 10). Это означает, что одно из чисел равно 5^3, а второе 2^3, и тогда их сумма равна $125+8=133$.

Ответ: 133.

3. В прямоугольном треугольнике ABC катет BC равен 9. На этом катете находится центр окружности радиуса 4, которая касается прямых AB и AC. Найдите площадь треугольника ABC.

Решение. Проведем радиус в точку касания окружности со вторым катетом AC. Этот радиус должен быть перпендикулярен AC, значит он целиком лежит на катете BC, т.е. окружность касается второго катета в вершине прямого угла С:



Пусть окружность касается гипотенузы в точке D, тогда $OD \perp AB$.

Рассмотрим треугольники ODB и ACB:

$\angle ODB = \angle ACB = 90°; \angle B -$ общий $\quad \Longrightarrow$

$\Delta ODB \sim \Delta ACB$, причем $\dfrac{OD}{AC} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{OB}{AB} \quad \Rightarrow \quad AC = \dfrac{BC \cdot OD}{BD}$

OC и $OD -$ радиусы окружности $\Rightarrow \quad OD = 4; \quad BO = BC - OC = 5.$

По теореме Пифагора $BD = \sqrt{25 - 16} = 3;$

$AC = \dfrac{9 \cdot 4}{3} = 12; \quad S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC = 54.$

Ответ: $\boldsymbol{S_{ABC} = 54.}$

4. Дорога от дома до школы занимает у Пети 20 мин. (Петя всегда идет с постоянной скоростью). Однажды по дороге в школу он вспомнил, что забыл дома ручку. Если теперь он продолжит свой путь с той же скоростью, то придет в школу за 3 мин до звонка, а если вернется домой за ручкой, то, идя с той же скоростью, опоздает к началу урока на 7 мин. Какую часть пути он прошел до того, как вспомнил о ручке?

Решение. Обозначим за x время (в минутах), которое потребовалось Пете для того, чтобы вспомнить о ручке. Если Петя будет возвращаться за ручкой, то придет в школу на 10 минут позже, чем если бы он не возвращался (3 мин до звонка + 7 мин после звонка) или, что то же самое, на $2x$ минут позже (ему придется потратить два раза по x минут на путь до дома и обратно до точки просветления). Таким образом, $2x = 10; x = 5$. Весь путь занимает 20 мин, а вспомнил он о ручке через 5 мин, значит прошел к этому времени $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ пути.

Ответ: $\frac{1}{4}$ пути.

5. При каких значениях a графики функций $y = 2ax^2 + 2x + 1$ и $y = 5x^2 + 2ax - 2$ пересекаются в одной точке?

Решение. Для того, чтобы графики данных функций пересекались в одной точке необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$2ax^2 + 2x + 1 = 5x^2 + 2ax - 2$$

или, что то же самое

$(2a - 5)x^2 - 2(a - 1)x + 3 = 0$

имело ровно одно решение.

Возможны два случая: а) это уравнение является линейным, т.е. $(2a - 5) = 0$; б) это уравнение является квадратным. Рассмотрим каждую из ситуаций:

а) $2a - 5 = 0$

$a = 2{,}5$

$-2(2{,}5 - 1)x + 3 = 0$

$2x - 2 = 0$

$x = 1$

В этом случае уравнение имеет одно решение $x = 1$, значит графики пересекаются в одной точке с координатами $(1;8)$.

б) $a \neq 2{,}5$

$\frac{D}{4} = (a - 1)^2 - 3(2a - 5) =$

$= a^2 - 2a + 1 - 6a + 15 =$

$= a^2 - 8a + 16 = (a - 4)^2$

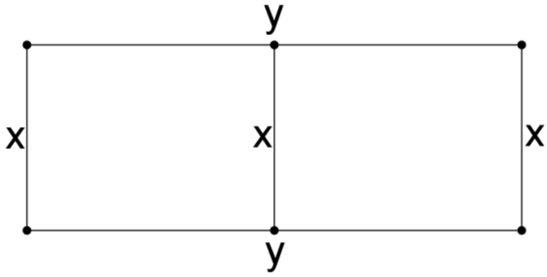
Для того чтобы квадратное уравнение имело 1 решение, дискриминант должен быть равен 0.

$\frac{D}{4} = (a - 4)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4$

Если $a = 4$, то уравнение имеет одно решение $x = \frac{(a-1)}{2a-5} = \frac{3}{3} = 1$, а значит графики данных функций пересекаются в одной точке с координатами (1; 11).

Ответ: $a = 2{,}5$ и $a = 4$.

6. У Васи есть 24 одинаковые спички. Он хочет сложить из них фигуру, состоящую из 2 одинаковых прямоугольников (см. рисунок) так, чтобы площадь всей фигуры была максимальной (ломать спички нельзя). Найдите x и y.



Решение 1.

Заметим, что $3x + 2y = 24$, тогда $y = \frac{24-3x}{2} = 12 - 1{,}5x$.

$S = xy = x(12 - 1{,}5x) = -1{,}5x^2 + 12x$, т.е. площадь – это квадратичная функция от x.

Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз, значит $S_{\text{наиб}} = S(x_{\text{в}}) = S\left(\frac{-12}{2(-1{,}5)}\right) = S(4)$, т.е. $x = 4$, а $y = 6$.

Решение 2.

Поскольку спички ломать нельзя, то x и y - натуральные числа.

$3x + 2y = 24 \quad \Rightarrow \quad 2y = 24 - 3x \quad \Rightarrow \quad 2y = 3(8 - x) \quad \Rightarrow \quad y = 3n, \quad n \in \mathbb{N}$

$3x + 2y = 24 \quad \Rightarrow \quad 3x = 24 - 2y \quad \Rightarrow \quad 3x = 2(12 - y) \quad \Rightarrow \quad x = 2m, \quad m \in \mathbb{N}$

$6n + 6m = 24 \quad \Rightarrow \quad n + m = 4; \quad S = x \cdot y = 6nm$.

Поскольку n и m - натуральные, то возможны всего три варианта:

$n = 1; m = 3; S = 18$

$n = 2; m = 2; S = 24$

$n = 3; m = 1; S = 18$

Площадь получается наибольшей при $n = m = 2$, т.е. $x = 4$ и $y = 6$

Ответ: $x = 4$ и $y = 6$.