Вступительная олимпиада. 7 класс. 2012 год.

1. ***Найдите два натуральных числа, сумма которых равна 192, а наибольший общий делитель равен 24.***

Наши числа имеют вид 24x и 24y, причем x и y взаимно просты. Тогда 24(x+y)=192, откуда x+y=8. Возможные значения x и y – 1 и 7, 3 и 5. Тогда искомые числа – 24 и 168 или 72 и 120.

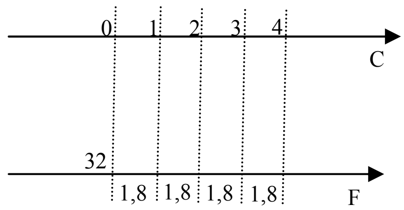
2. ***Дорога из А в В идет 3 км в гору, 6 км под гору и 12 км по ровной местности. Путь от А до В мотоциклист проехал за 1 час и 7 минут, а от В до А за 1 час и 16 минут. Найдите скорости движения в гору и под гору, если скорость на горизонтальном участке 18 км/ч.***

Обозначим скорости в гору и под гору через а и в соответственно. Тогда $\begin{cases} \frac{3}{a}+\frac{6}{b}+\frac{12}{18}=1\frac{7}{60} \\ \frac{6}{a}+\frac{3}{b}+\frac{12}{18}=1\frac{16}{60} \end{cases}$. Вычитая из первого уравнения удвоенное второе, получаем, что $-\frac{9}{a}-\frac{12}{18}=-1\frac{25}{60}$, откуда $a=12$км/ч. Тогда $b=30$км/ч.

3. ***Что больше:*** $\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$ ***или*** $\frac{10^{11}+1}{10^{12}+1}$ ***?***

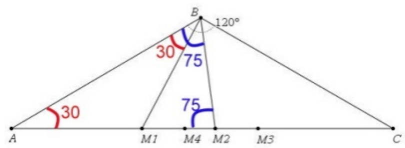
Сравним удесятеренные дроби: $\frac{10^{11}+10}{10^{11}+1}$ и $\frac{10^{12}+10}{10^{12}+1}$. Первая из них больше единицы на $\frac{9}{10^{11}+1}$, вторая – на $\frac{9}{10^{12}+1}$. Значит, первая дробь больше второй.

4. ***Один градус шкалы Цельсия равен 1,8 градусов шкалы Фаренгейта, при этом 0° по Цельсию соответствует 32° по шкале Фаренгейта. Может ли температура выражаться одинаковым числом градусов как по Цельсию, так и по Фаренгейту?***

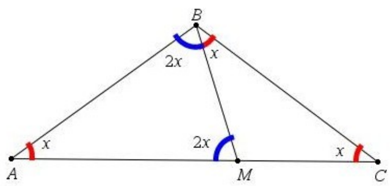


Глядя на схему, заметим, что температура по Фаренгейту $T=(32+1{,}8\cdot x)$°F, где x - температура по Цельсию. Из уравнения $32+1{,}8\cdot x=x$ найдем, что $x=-40$, то есть -40°C $=-40$°F.

5. ***В равнобедренном треугольнике АВС с тупым углом В на основании АС отметили точку М так, что хотя бы один из треугольников АВМ и ВСМ оказался равнобедренным. Укажите все возможные положения точки М, если ∠В=120⁰. При каком значении тупого угла В возможных положений точки М меньше всего?***



В треугольнике АМВ могут быть равны стороны АВ и АМ или АМ и МВ. Найдем соответствующие положения точки М (см. рисунок). Если $AM_1=BM_1$, то в треугольнике AM_1B углы равны 30°, 30°, 120°. Если $AM_2=AB$, то в треугольнике AM_2B углы равны 75°, 75°, 30°. Точки M_3, M_4 симметричны M_1 и M_2 относительно середины АС. Итак, нам годятся 4 точки.



Выясним, при какой величине угла В точки попарно совпадают (см. рисунок). Пусть M_2 совпала с M_3 (см. рисунок). Обозначив через x углы при основании ВС равнобедренного треугольника МСВ, заметим, что ∠ВАС=x, поскольку исходный треугольник равнобедренный. ∠ВМА=2x по теореме о внешнем угле для треугольника МВС. Тогда ∠АВМ=2x и, значит, сумма всех углов исходного треугольника АВС равна x+x+x+2x=180°, откуда находим, что x=108°.

6. ***Известно, что из четырех утверждений два верных и два неверных:***
   1) ***Число А делится на 5;***
   2) ***Число А делится на 23;***
   3) ***Число А+7 является квадратом натурального числа;***
   4) ***Число А–10 является квадратом натурального числа.***

Найдите все такие двузначные числа А. Поясните, почему других чисел нет.

Пусть второе утверждение верно. Тогда первое не верно. Значит, верно ровно одно из третьего и четвертого утверждений. Перебрав числа, делящиеся на 23 (которых совсем не много), находим единственное такое число 46.
Пусть второе утверждение не верно, а первое верно. Тогда А оканчивается на 0 или 5 и, значит, А+7 заканчивается на 7 или 2, что невозможно для точного квадрата. Значит, утверждение 3 ложно, тогда утверждение 4 истинно. Тогда А-10 оканчивается на 0 или 5, откуда находим, что А=35.
Пусть, наконец, первое и второе утверждения оба не верны. Тогда, поскольку (А+7)-(А-10)=17, нам нужно найти два квадрата, отличающиеся на 17 – это 64 и 81. Тогда А=74.
Итого, нашли три числа: 46, 35, 74.