

Решения задач 8 класса.

1. Существует ли число вида $55\dots5$, которое является полным квадратом?

Первое решение. Нет, так как все квадраты натуральных чисел, кратных 5, заканчиваются на 25. Докажем это. Всякое число с «пятеркой» на конце можно представить как $10a+5$. Тогда квадрат этого числа равен $10a+5^2 = 100a^2 + 2 \cdot 10a \cdot 5 + 25 = a^2 + a \cdot 100 + 25$.

Второе решение. Нет, так как это число делится на 5 (в частном - число, записанное единицами), и не делится на 25.

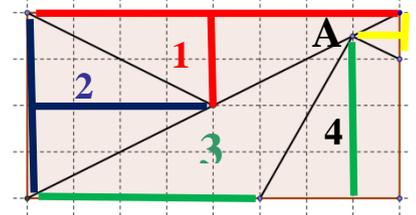
2. Малыш нарезал торт на куски (см. рисунок). Помогите Карлсону взять кусок самой большой площади.

Площади частей 1 и 2 равны четвертям площади прямоугольника – по 8.

Точка А – середина стороны клетки. Поэтому площадь куска 3 равна

$$\frac{5 \cdot 3\frac{1}{2}}{2} = 8\frac{3}{4}. \text{ Значит, она больше половины от половины торта, и больше}$$

куска 4 (и, конечно, маленького куска).



Можно и «честно» посчитать площади всех треугольников, умножая половину основания на высоту. При этом важно в каждом треугольнике взять удобную высоту и основание. Такие «удобные» основания и высоты для каждого треугольника показаны своим цветом – см. рисунок.

3. Сколько слагаемых со знаком «минус» получится после приведения многочлена $(-a+b-c)(d-e+f)(-g-h+k)$ к стандартному виду? А сколько всего получится слагаемых?

Ответьте на вопросы, не раскрывая скобки. Ответ обоснуйте.

Очевидно, что подобных слагаемых после раскрытия скобок не будет.

Раскроем произведение первых двух скобок. Получим всего девять слагаемых – каждый из трех слагаемых в первой скобке умножится на каждый из трёх во второй. При этом получится 5 отрицательных слагаемых – это произведения 2 отрицательных из первой и 2 положительных из второй (итого 4), и произведение одного положительного на один отрицательный во второй. Оставшиеся четыре – положительные. Аналогично, после умножения полученных пяти отрицательных на одно положительное в третьей скобке, и четырёх положительных на два отрицательных в третьей, получаем тринадцать $5 \cdot 1 + 4 \cdot 2$ отрицательных. А всего слагаемых после раскрытия скобок получится $9 \cdot 3 = 27$.

4. Решите уравнение: $0,35 \cdot 0,35x - 1 - 0,45 \cdot 0,45x - 2 = 0 \Leftrightarrow 0,35^2 x - 0,45^2 x = 0,35 - 2 \cdot 0,45$.

$0,45^2 x - 0,35^2 x = 2 \cdot 0,45 - 0,35 \Leftrightarrow x \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 0,55 \Leftrightarrow x = \frac{55}{8}$. Обратите внимание, что возводить числа в квадрат не требуется – удобнее воспользоваться формулой «разность квадратов».

5. В дремучем Муромском лесу растут дубы и осины. Известно, что дубы составляют 99% всех деревьев. Илья Муромец вырубил часть дубов, так что в выжившем лесу стало 98% дубов. Какую (в процентах) часть леса вырубил Илья Муромец?

Давайте забудем про дубы, которые вырубил, и подумаем про осины, число которых не изменилось.

Вначале их было x штук, которые составляли 1% леса, а в конце их осталось x штук, которые составляли 2% леса. Значит, сперва деревьев в лесу было $100x$, а потом стало $50x$. Значит, вырубил половину леса.

Ответ: 50%.

6. Одна из вершин прямоугольного треугольника лежит в точке (2;4), другая – в начале координат. Найдите все возможные положения третьей вершины, если известно, что одна из сторон треугольника параллельна оси ординат.

Сторона, параллельная оси ординат, должна лежать на прямой $x=2$ (эта сторона не может содержать начало координат). Ясно, что прямой угол треугольника может быть либо при вершине О (начале координат), либо при третьей вершине. Если при третьей, то третья сторона треугольника – ось Ох, координаты третьей вершины – $C(2,0)$. Если же прямой угол при вершине О, координаты третьей вершины $(2,-1)$ (смотри рисунок).

