7 класс

1. Назовём клетчатый квадратный коврик пёстреньким, если каждая его клетка покрашена, и никакие две клетки, имеющие хотя бы одну общую точку, не покрашены в один цвет. Существует ли 5-цветный пёстренький коврик размером 5 на 5?

Да, существует. Например:

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

(Цифрами показаны разные цвета).

2. В дремучем Муромском лесу растут дубы и осины. Известно, что дубы составляют 99% всех деревьев. Илья Муромец вырубил часть дубов, так что в выжившем лесу стало 98% дубов. Какую (в процентах) часть леса вырубил Илья Муромец?

Давайте забудем про дубы, которые вырубили, и подумаем про осины, число которых не изменилось. Вначале их было x штук, которые составляли 1% леса, а в конце их осталось x штук, которые составляли 2% леса. Значит, сперва деревьев в лесу было 100x, а потом стало 50x. Значит, вырубили половину леса.

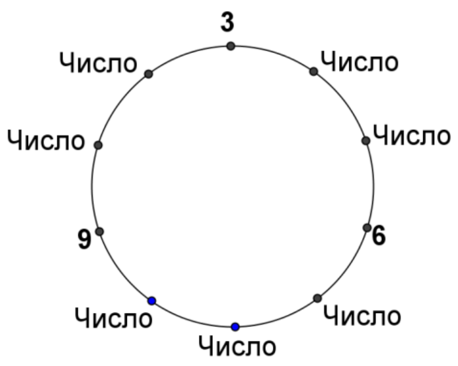
Ответ: 50%.

3. Можно ли расставить по кругу натуральные числа от 1 до 10 так, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих через два, делилась на три?

Нет, нельзя.

Первое решение. Предположим, что можно расставить все натуральные числа от 1 до 10 требуемым образом. Тогда, сложив все суммы любых двух чисел, стоящих через два, получим, с одной стороны, число, делящееся на три, а с другой стороны, удвоенную сумму всех написанных чисел, так как в рассматриваемую сумму каждое число входит дважды. Но сумма натуральных чисел от 1 до 10 равна $\frac{1+10}{2}\cdot 10=55$, а число 55 на три не делится. Значит, мы пришли к противоречию и наше предположение о том, что можно расставить все натуральные числа от 1 до 10 требуемым образом, неверно. Таким образом, расстановка невозможна.

Второе решение. Предположим, что это возможно. Тогда среди расставленных по кругу чисел наверняка есть число 3. Заметим, что среди чисел от 1 до 10 только два числа, 6 и 9, в сумме с числом 3 дают результат, кратный трем. Это означает, что с одной стороны от числа 3 на расстоянии двух чисел стоит число 6, а с другой стороны – число 9. Получается такая картинка:

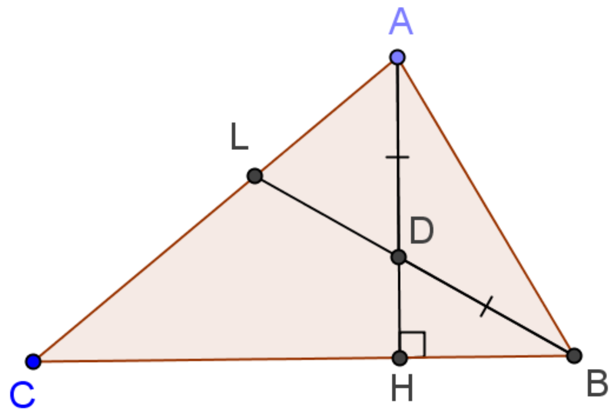


Заметим, что на расстоянии двух чисел от числа 6 точно окажется не 3 и не 9, однако только 3 и 9 в сумме с 6 дают результат, кратный трем. Получаем противоречие – расстановка невозможна.

4. В треугольнике ABC высота из вершины A, биссектриса из вершины B и серединный перпендикуляр к стороне AB пересеклись в одной точке. Найдите градусную меру угла B.

Ответ: угол B=$60°$.

Из условия получаем, что углы при основании AB треугольника DAB равны. Пусть они равны x. Тогда угол DBH тоже равен x. В прямоугольном треугольнике ABH сумма острых углов A и B равна 3x. То есть x равен 30^{o} . Тогда угол B равен 60^{o}.



5. Если сумма 2000 положительных целых чисел равна 2001, то чему равно их произведение?

Ответ: 2.

Решение: Заметим, что рассматриваемые в задаче числа целые положительные, значит каждое из них не меньше, чем единица. Если бы каждое из этих чисел равнялось единице, то их сумма равнялась бы 2010, а не 2011, значит, среди 2010 данных чисел найдётся по крайней мере одно число, большее единицы. Ясно, что такое число ровно одно и это число 2 (иначе сумма была бы больше 2011). Значит, произведение всех чисел (а именно 2010 единиц и 1 двойки) равно 2.

6. Прямоугольник разбили на 8 квадратов (см. рисунок). Сторона самого маленького квадрата (в центре) равна 4. Чему равна сторона самого большого?

Ответ: сторона самого большого квадрата равна 18.

Решение:

В центре каждого квадрата указаны длины их сторон. Из рисунка видно, что горизонтальная сторона прямоугольника с одной стороны равна 4x+12, а другой стороны равна 8x-8.

Решая уравнение: 4x+12=8x-8, находим x=5, следовательно, длина стороны самого большого квадрата равна 2·5+8=18.