

Решения задач 9 класса.

1. Пройдя половину пути, катер увеличил скорость на 25% и поэтому прибыл на полчаса раньше. Сколько времени он двигался?

Пусть скорость катера вначале равна v , а путь равен $2S$. Тогда $\frac{2S}{v} - \left(\frac{S}{v} + \frac{S}{1,25v} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{10} \frac{2S}{v} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2S}{v} = 5$. Планируемое время $t = \frac{2S}{v} = 5$, тогда реальное $5 - 0,5 = 4,5$ часа.

2. Найдите квадратичную функцию (то есть вида $y = ax^2 + bx + c$), график которой проходит через точки (1;2), (-1;3) и (0;0).

Для того, чтобы квадратичная функция проходила через данные точки, необходимо и достаточно,

чтобы выполнялись следующие условия:
$$\begin{cases} 2 = a + b + c \\ 3 = a - b + c \\ 0 = c \end{cases}$$
, откуда $y = 2,5x^2 - 0,5x$.

3. Решите систему $\begin{cases} x^2y + y^2x = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$.

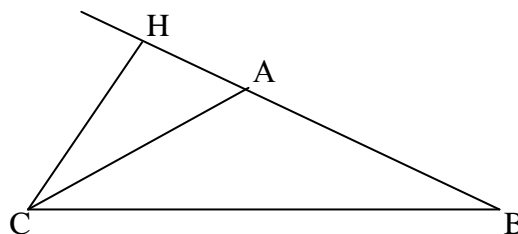
$\begin{cases} x^2y + y^2x = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y) = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$. Сделаем замену переменных $x + y = u, xy = v$, получим систему

$\begin{cases} uv = 6 \\ u + v = 5 \end{cases}$, откуда либо $u = 2, v = 3$, либо $u = 3, v = 2$. Решив системы $\begin{cases} xy = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$,

получим ответ: (1,2) и (2,1).

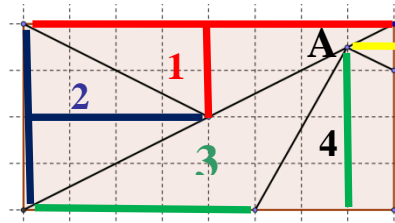
4. Угол равнобедренного треугольника равен 120° . Высота, проведенная к боковой стороне, равна 9 см. Найдите стороны треугольника.

Ответ: $6\sqrt{3}, 6\sqrt{3}, 18$. Главное, на что нужно обратить внимание в этой задаче – на то, что данная высота опущена на продолжение стороны. В прямоугольном треугольнике ВСН гипотенуза в два раза больше катета, лежащего против угла в 30° , то есть $BC = 18$. Из треугольника АНС находим $AC = 6\sqrt{3}$.



5. Малыш нарезал торт на куски (см. рисунок). Помогите Карлсону взять кусок самой большой площади.

Площади частей 1 и 2 равны четвертям площади прямоугольника – по 8. Точка А – середина стороны клетки. Поэтому площадь куска 3 равна $\frac{5 \cdot 3 \frac{1}{2}}{2} = 8 \frac{3}{4}$. Значит, она больше половины от половины торта, и больше куска 4 (и, конечно, маленького куска).



Можно и «честно» посчитать площади всех треугольников, умножая половину основания на высоту. При этом важно в каждом треугольнике взять удобную высоту и основание. Такие «удобные» основания и высоты для каждого треугольника показаны своим цветом – см. рисунок.

6. а) Сколько слагаемых получится после приведения многочлена $(a+b-c)(d-e+f)(-g-h)$ к стандартному виду (то есть после «раскрытия скобок»)? б) Сколько при этом получится слагаемых со знаком «минус»?

Ответ: 18 слагаемых, 10 со знаком «минус». Решение – см. задачу 3 из олимпиады 8 класса.