Тема урока: Построение равностороннего треугольника, связанного с уже имеющейся в условии данной фигурой

Цели урока

1. Ученики повторяют уже известные им приёмы использования программы для решения задач
2. Ученики в процессе решения геометрических задач знакомятся с новыми командами программы.
3. Ученики повторяют сведения из предыдущего курса геометрии.
4. Ученики знакомятся с этапами задачи на построение.

Материалы урока и задания

Фрагменты рассказа учителя.

1. Равносторонний треугольник можно строить « с нуля», то есть в ситуации, когда начальные фигуры отсутствовали.

   Однако бывает так, что в задаче есть некие начальные фигуры, исходя из которых осуществляется построение. Эти начальные фигуры с одной стороны ограничивают наши возможности, с другой стороны позволяют использовать их для решения задачи. Типичным примером такой задачи является построение правильного треугольника, вписанного в заданную окружность (иначе говоря, деление окружности на три равные части); ещё пример – построение окружности, вписанной в данный треугольник.

   На этом уроке будет предложена задача такого типа.
2. В решении задачи на построение выделяют три этапа: построение, доказательство, исследование. Прежде, чем начать построение, часто проводится анализ исходного условия, после чего намечаются пути построения.

   В процессе исследования надо ответить на такие вопросы: всегда ли задача имеет решение; если не всегда, то при каких условиях она может быть решена? Например, задача о построении треугольника по трём сторонам может быть решена только при выполнении неравенства треугольника для трёх заданных отрезков (достаточно проверить его выполнение для наибольшего отрезка). Далее, надо выяснить, сколько решений имеет задача: одно, несколько или бесконечное множество.

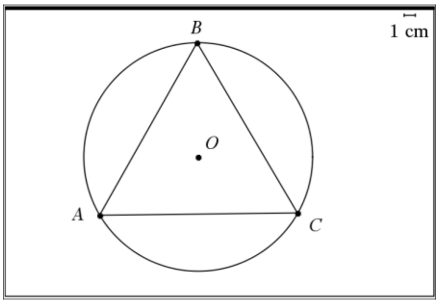
   Если речь в задаче идёт о построении треугольника, то такая задача может решаться разными способами. Встаёт вопрос: мы получаем в результате равные треугольники или нет? Если получаем равные треугольники, то считается что решение одно.

   Используя программу, в равенстве треугольников можно убедиться не только на основании признаков равенства, но и в результате совмещения треугольников на экране дисплея в результате определённого движения.
3. Прежде, чем перейти к задаче, стоит повторить с учениками элементы и свойства окружности: центр, радиус, диаметр, хорда; равенство радиусов, полный угол и его величина — 360°.

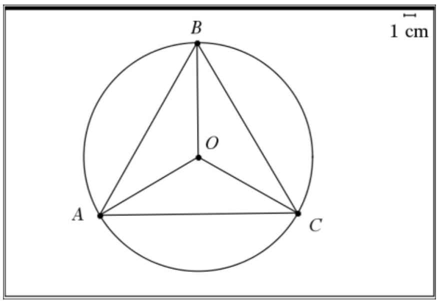
Задача. Дана окружность. Построить на этой окружности вершины равностороннего треугольника. (Про такой треугольник говорят, что он вписан в окружность.)

Проведём анализ этой задачи.

Предположим, что задача решена — нарисуем окружность с центром *O* и правильный треугольник *ABC*, вписанный в неё.



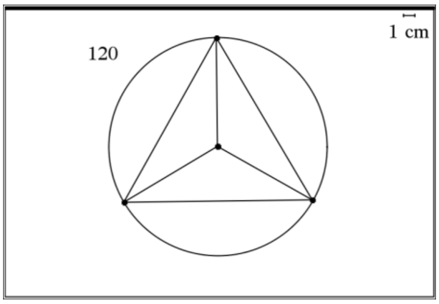
Если провести радиусы в вершины этого треугольника, то можно увидеть на рисунке три равных между собой треугольника: *OAB, OBC, OCA*.



Треугольники эти равны по трём сторонам (две стороны в каждом таком треугольнике – это радиусы данной окружности, а третья сторона каждого из них — это сторона правильного треугольника *ABC*). Но тогда равны углы при вершине *O* в каждом из них. А так как полный угол равен 360^0, то величина каждого из углов при вершине *O* в этих треугольниках равна 120^0. Это наблюдение приводит к мысли о том, как решить предложенную задачу.

Способ 1

1. Провести окружность.
2. Провести из центра окружности отрезок к точке на окружности, то есть радиус окружности.
3. Повернуть его относительно центра окружности на 120 градусов по часовой стрелке.
4. Повернуть его относительно центра окружности на 120 градусов против часовой стрелки.
5. Соединить отрезками полученные на окружности точки – концы трёх радиусов.



Треугольник, сторонами которого являются построенные три отрезка, будет правильным.

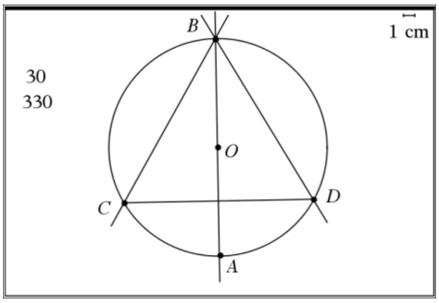
Доказательство

Пусть *O* — центр окружности, *OA* — первоначально построенный радиус, *B* и *C* — полученные при таком построении точки. Отрезки *OA, OB, OC* равны как радиусы одной окружности. Треугольники *OAB, OBC, OCA* равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда следует, что отрезки *AB, BC, CA* равны между собой, а потому треугольник *ABC* — правильный.

Однако возможно иное построение (оно было предложено учениками, но если такового не последовало, может быть предложено учителем).

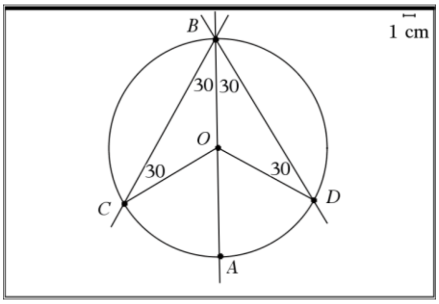
Способ 2

1. Провести окружность. Обозначить ее центр *O*.
2. Провести прямую через точку *O*, найти точки пересечения прямой и окружности, обозначить их *A* и *B*.
3. Повернуть прямую *AB* относительно точки *B* на 30°, найти точку пересечения полученной прямой и окружности, обозначить ее *C*.
4. Повернуть прямую *AB* относительно точки *B* на 30° в другую сторону от диаметра *AB*, найти точку пересечения полученной прямой и окружности, обозначить ее *D*.
5. Построить отрезок *CD*.
6. Соединить отрезками полученные на окружности точки.



Доказательство

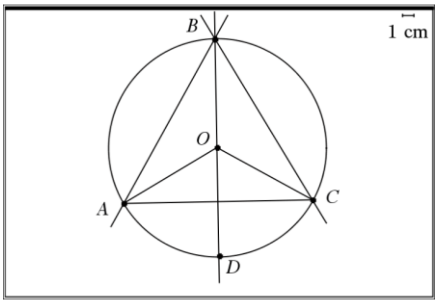
Проведём радиус *OC*. *OC* = *OB* как радиусы окружности, следовательно треугольник *OBC* - равнобедренный, поэтому угол *OCB* равен 30°. Проведём радиус *OD*. *OD* = *OB* как радиусы окружности, следовательно треугольник *OBD* - равнобедренный, поэтому угол *ODB* равен 30°.



Получаем, что треугольники *OBC* и *OBD* равны (по стороне и двум углам), откуда следует, что *BC* = *BD* . В равнобедренном треугольнике *CBD* угол *CBD* равен 60°. Согласно одному из признаков равностороннего треугольника, треугольник *CBD* является равносторонним.

Рассказ учителя

Способу 2 также может предшествовать анализ. Он может быть проведён следующим образом. При анализе, предшествующем первому построению, был использован радиус исходной окружности. Можно исходить из диаметра окружности.



Пусть равносторонний треугольник *ABC* вписан в окружность с центром *O*. Проведём диаметр *BD* этой окружности.

Из равенства треугольников *OAB* и *OCB* делаем вывод о равенстве углов *OBA* и *OBC*. Следовательно, *BD* — биссектриса треугольника, а потому углы *OBA* и *OBC* равны 30° каждый. На основании проведённого анализа и вытекает план построения 2.

Замечание 1. Можно сразу фронтально рассмотреть оба способа и затем предложить ученикам осуществить построение любым из них. Это позволит сэкономить время на уроке.

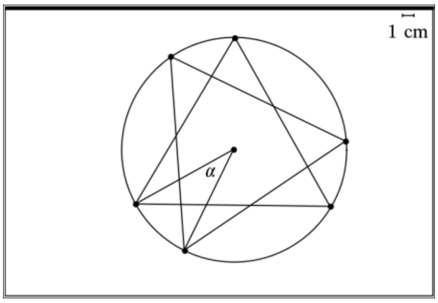
Ученики самостоятельно выполняют построение с помощью программы, следуя любому из предложенных способов построения. Проверка того, что в результате получается равносторонний треугольник, может быть выполнена с помощью программы. Именно, выбрав одну из вершин как центр поворота, ученики могут убедиться в том, что одна из сторон треугольника при этой вершине получается из другой стороны в результате поворота на 60°. Затем выбирается другая из полученных вершин и повторяется эта процедура.

Замечание 2. Можно, разумеется, осуществить проверку, проводя с помощью программы достаточные измерения – длин сторон или углов. Но культивировать такой способ не стоит. Целесообразнее отдавать предпочтение чисто геометрическим методам.

Рассказ учителя (после того как учениками выполнено построение)

Проведём исследование этой задачи. Мы видим два различных способа построения равностороннего треугольника, вписанного в окружность. При любом способе построения задача имеет решение, так как все указанные построения выполнимы в данной программе.

При каждом способе построения получаются равные равносторонние треугольники. Чтобы в этом убедиться, достаточно построить заданным способом два равносторонних треугольника и совместить их поворотом вокруг центра окружности на фиксированный угол α.

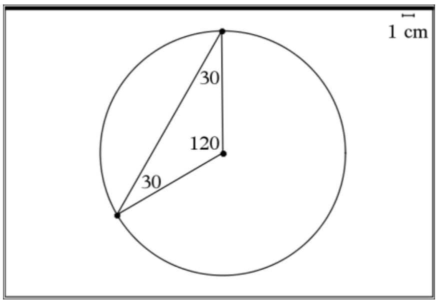


Замечание 3. Можно предложить это сделать ученикам с помощью программы

Более интересен вопрос о равенстве равносторонних треугольников, полученных разными способами, именно: один треугольник получен первым способом, а второй треугольник – вторым способом. Однако он решается так же. В самом деле, пусть построены два равносторонних треугольника, вписанных в данную окружность. В результате поворота одного из них, выполняемых с помощью программы, можно убедиться в их равенстве.

Замечание 4. Эту часть исследования учитель обсудит с классом, не используя программу.

Замечание 5. Можно увидеть, что способ 1 и способ 2 эквивалентны. Дело в том, что ключевой фигурой в этих построениях является равнобедренный треугольник с углами 30°, 30° и 120°. Только получен он разными способами.



Замечание 6. Использование такого треугольника даёт ещё один способ построения равностороннего треугольника. Для этого достаточно взять такой треугольник и осуществить два последовательных поворота вокруг его вершины на 120° в одном направлении.

Но принципиально другое. Одну и ту же фигуру можно строить разными способами, поэтому число решений в задаче на построение, в частности, вопрос о единственности решения, должен решаться независимо от способа построения.

Домашнее задание

Дан равносторонний треугольник. Требуется на его основе построить другой равносторонний треугольник. Предложите такое построение. Приведите решение полностью: построение, доказательство, исследование (последнее — по возможности)

Предполагаемые построения.

Способ 3

1. Построить любым способом равносторонний треугольник.
2. Отметить середины сторон.
3. Соединить их отрезками.

Доказательство вытекает из первого признака равенства треугольников.

Способ 4

1. Построить любым способом равносторонний треугольник.
2. Через вершины провести прямые, параллельные противолежащим сторонам.

Отметить точки пересечения.

3. Соединить их отрезками.

Доказательство вытекает из признака равностороннего треугольника, так как в построенном треугольнике все углы равны 60°.

Способ 5

Построить окружность. Построить равносторонний треугольник, каждая сторона которого имеет с данной окружностью одну общую точку (треугольник, описанный вокруг окружности).

Возможна и такая формулировка: как выбрать точки на окружности, чтобы получился равносторонний треугольник, внутри которого будет находиться данная окружность?

Построение использует результаты, полученные в двух предыдущих построениях: сначала проводим построение способом 3, а затем построение способом 4.

При желании учитель может сам предложить на дом построения способами 3 – 5 или некоторые из них, указав для этого необходимые команды.