Академия математики

В.И.Рыжик

О РАССТОЯНИИ ВООБЩЕ И РАССТОЯНИИ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ В ЧАСТНОСТИ

Надеюсь, мой рассказ о расстоянии будет хорошим подспорьем при повторении курса стереометрии. Надеюсь также, что в нем вы найдете и что-то не известное вам ранее.

Большое видится на расстоянье.
С.Есенин

Сначала — разминка

Разминкой будет следующая *задача*.

а) На горизонтальной плоскости задана прямая, а на прямой — две точки. Обе точки одновременно стали удаляться с одинаковой скоростью от этой плоскости по прямой траектории: первая точка вертикально, а вторая — нет. Спустя некоторое время надо выяснить, какая из точек окажется ближе к заданной прямой.

б) На горизонтальной плоскости заданы три прямые. Две из них параллельны между собой. Обе эти прямые одновременно стали удаляться с одинаковой скоростью от этой плоскости, двигаясь параллельно самим себе: первая прямая вертикально, а вторая — нет. Спустя некоторое время надо выяснить, какая из прямых окажется ближе к третьей прямой, заданной на той же плоскости.

Попытайтесь дать ответ, ничего не рисуя.

Каким бывает расстояние?

Школьный курс математики, в том числе геометрии, изобилует частностями. Так, во многих учебниках геометрии упоминаются разные виды расстояния: между двумя точками; от точки до прямой; от точки до плоскости; между двумя прямыми — параллельными или скрещивающимися; между прямой и параллельной ей плоскостью; между двумя параллельными плоскостями. Иногда в курсах стереометрии говорится о расстоянии по поверхности — в задачах, где речь идет о развертках фигур. Известный пример: паук находится на одной грани куба, а муха — на другой; требуется найти кратчайший путь по поверхности куба от паука до мухи (при условии, что данных в задаче достаточно).

Но даже такой подробный перебор всевозможных расстояний не покрывает того, с чем порой приходится встречаться на практике или в задачах из тех же учебников геометрии. Когда мы слышим о высоте спутника над Землей; когда футбольный судья во время штрафного удара отодвигает «стенку» на 9 м; когда говорят о том, что корабли находятся в опасной близости друг от друга или упоминают о толщине атмосферного слоя Земли — всюду мы имеем дело с расстояниями. Да только не с теми, о которых говорится в учебниках. И в школьных задачах аналогичная картина: предлагается определить расстояние от точки до круга (шара) или между двумя кругами (шарами); вычислить ширину кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями, и т.д.

Действуя «в школьном духе», мы должны были бы для каждой пары фигур давать «персональное» определение расстояния между ними, что делает сам такой подход подозрительным. В школьной практике «дело о расстоянии» обычно сводится к нахождению длины перпендикуляра (общего перпендикуляра), существование которого во многих случаях вполне очевидно: когда он проводится из точки к прямой (плоскости), между параллельными прямыми (плоскостями; прямой и плоскостью). Вопрос о единственности перпендикуляра тоже не вызывает проблем.

От перпендикуляра — к кратчайшему отрезку

Если же мы находим расстояние от точки до луча, выясняется, что перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, содержащую данный луч, не всегда попадает на этот луч (сделайте соответствующий рисунок). Теперь представьте себе, что проекция точки на заданную прямую является началом некоторого луча на этой прямой и что луч начал двигаться по прямой в одну сторону. Мы увидим, что луч (в одном из случаев) удаляется от данной точки, а опущенный из нее ранее перпендикуляр неподвижен. Этот пример показывает, что расстояние от точки до луча — это не обязательно перпендикуляр, проведенный из точки к прямой, содержащей луч. Если проекция точки на прямую не попадает на данный луч, то естественно считать расстоянием от этой точки до луча расстояние от нее до начала луча.

Рассмотренная ситуация встречается в хорошо известном факте школьного курса геометрии. Порой от учеников можно услышать: «Биссектриса угла — это множество точек, равноудаленных от сторон угла». Но ведь стороны угла — лучи, а не прямые, и расстояние от точки до стороны угла — это, как мы теперь понимаем, не всегда перпендикуляр, проведенный из точки на сторону угла, — если точка лежит вне угла (подтвердите это рисунком). Поэтому множество точек, равноудаленных от сторон угла, не сводится к биссектрисе этого угла. Попробуйте нарисовать это множество точек. А теперь сообразите, как поправить формулировку, чтобы в ней речь шла именно о биссектрисе угла. (Данную тему можно развить — попытайтесь нарисовать множество точек, удаленных на заданное расстояние, скажем, от квадрата или даже от куба.)

Замечу, что недавно мне довелось прочитать в одной из статей учебно-методической газеты «Математика», в № 12 за 2007 г., именно такое утверждение: «Множество точек, равноудаленных от сторон угла, является его биссектрисой». Так что ошибаются не только школьники. Особо любопытно, что в этой статье обсуждается, в частности, что такое расстояние от точки до луча.

И у двух фигур общий перпендикуляр может отсутствовать, а существование расстояния между ними не вызывает сомнения. Простейшие примеры тому: расстояние между двумя кругами (шарами); расстояние между двумя отрезками, расположенными на пересекающихся прямых.

В подобных ситуациях хочется большей общности, естественно желание иметь определение расстояния, которое работало бы во всех случаях. Такое определение есть, и при повторении школьного курса геометрии в самый раз с ним познакомиться. Тем самым будем следовать известной научной тенденции — формулировать понятие в максимальной общности с тем, чтобы потом применять его в конкретных случаях.

Самое общее понятие расстояния на множестве я обсуждать здесь не буду, не буду говорить даже о расстоянии между двумя точками на поверхности, хотя и об этом можно вести интересный разговор[1]. Я поведу речь о расстоянии между двумя фигурами — на плоскости или в пространстве.

Определение. *Расстояние между двумя фигурами* — это длина кратчайшего отрезка, соединяющего точки этих фигур.

Другими словами, расстояние между двумя фигурами — это расстояние между ближайшими точками фигур. Например, расстояние между кругами на рис. 1 равно расстоянию между точками A и B, т.е. длине отрезка AB.

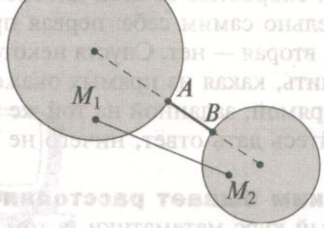

Рис. 1

Если фигуры имеют общую точку, расстояние между ними положим равным нулю. Нулевое рас-

[1] Эти вопросы рассматриваются, например, в книгах [1–3].

стояние между фигурами говорит об их соприкосновении (вспомните игру «Пятнашки»). Замечу тут же, что одной из фигур в моем рассказе может быть точка.

О задаче на нахождение расстояния между фигурами

В соответствии с данным определением отыскание расстояния между фигурами является задачей на поиск наименьшего значения, т.е. задачей «на экстремум». Такие задачи наверняка попадались вам в курсе математики, когда вы занимались функциями. При этом оказывалось, что возможно всякое: функция могла не иметь наименьшего значения (например, как $y = x$) или иметь его (как функция $y = x^2$). Наименьшее значение, если оно есть, то одно, но достигаться может больше одного раза, возможно даже бесконечное число таких «достижений» (как, например, у функции $y = \sin x$). Напоминаю, что наименьшее значение функции не тождественно минимальному.

«Экстремальные задачи», в частности на поиск наименьшего значения, встречаются и в геометрии. Можно вспомнить знаменитую задачу Дидоны — частный случай изопериметрической задачи, которую я привожу здесь в свободной трактовке: как огородить веревкой заданной длины прямоугольный участок наибольшей площади? Нахождение диаметра фигуры — это отыскание наибольшего расстояния между ее точками (иначе говоря, самого длинного отрезка, который в ней умещается). Еще пример: нахождение ширины фигуры — это отыскание наименьшего расстояния между параллельными прямыми, опорными для данной фигуры.

При таком общем подходе нахождение расстояния между фигурами становится задачей на поиск экстремума для фигур. Стоит заметить, что для положительно определенных функций нахождение наименьшего значения сводится к нахождению расстояния от графика функции до оси абсцисс. О связи расстояний и аналитических задач можно поговорить отдельно (модуль — это расстояние!).

Поиск расстояния между фигурами столь же проблематичен, как и нахождение экстремальных значений функции. Из определения расстояния между фигурами как длины кратчайшего отрезка между их точками не следует существование такого отрезка. А если он есть, то возникает вопрос: сколько таких кратчайших отрезков можно построить, сколько раз может достигаться наименьшая длина? И то и другое надо выяснять специально.

Несколько важных замечаний

Бывает, между двумя фигурами нет расстояния — это когда у них нет ближайших точек. Например, если данные фигуры — круги без границ (окружностей), не имеющие общих точек; образно выражаясь, два «оскальпированных» круга[2]. Подумайте, почему в этом случае нельзя указать ближайшие точки фигур.

Кратчайших отрезков между фигурами может быть бесконечное множество (как, например, между параллельными плоскостями), но тогда они все равны и расстояние между фигурами одно.

Длину кратчайшего отрезка между двумя фигурами не всегда легко найти, даже если данных в принципе хватает. Иногда для этого требуется большая вычислительная работа. Скажем, если надо вычислить расстояние между квадратом и кругом, которые лежат в одной плоскости. Попробуйте сочинить аналогичную задачу для других фигур, а затем и решить ее.

Я предлагаю своим ученикам найти расстояние между равными кругами, расположенными в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (к примеру, между двумя кругами, нарисованными на соседних страницах учебника геометрии). И что-то ученики не спешат ко мне с ответами.

Хочу предостеречь вас от словесной путаницы, которая иногда встречается. Можно услышать или прочитать о «кратчайшем расстоянии между фигурами», будто бы таких расстояний много, и надо найти только самое маленькое из них. Но вы уже, конечно, поняли: расстояние между двумя фигурами, если оно есть, определено однозначно, хотя достигаться может не один раз. А если нечто существует в одном экземпляре, то выбирать просто не из чего.

И последнее: в математике расстояние — это *число*, но в приложениях или в школьных задачах оно может пониматься как *величина*, а потому имеет размерность. Значит, можно сказать:

[2] В школьном курсе геометрии с подобными «оскальпированными» фигурами дела не имеют, но за его пределами и в таком случае можно ввести понятие расстояния между двумя фигурами как точной нижней границы всевозможных расстояний между точками этих фигур.

«Расстояние равно 1». Но можно сказать и так: «Расстояние равно 1 см».

Вспомним теорию

Перейдем теперь к скрещивающимся прямым. Сразу скажу, что я ставлю только одну цель: рассказать об основных способах нахождения расстояния между ними, сопроводив свой рассказ самыми простыми, типично учебными примерами. Поэтому ограничусь разбором тех ситуаций, которые доставляет нам рассмотрение скрещивающихся прямых, так или иначе связанных с кубом. И лишь в конце статьи приведу ряд задач другого типа, в том числе несколько задач вступительных экзаменов в вузы.

В тексте вам не раз встретится вопросительный знак в квадратных скобках **[?]**. Он означает, что в этом месте рассуждений имеется пропуск, каковой вам хорошо бы восполнить самостоятельно.

В дальнейшем нам потребуются некоторые утверждения о скрещивающихся прямых.

Утверждение 1. Через каждую из скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой (рис. 2, *а*).

На этом рисунке a и b — скрещивающиеся прямые, β и α — плоскости, параллельные этим прямым.

Утверждение 2. Пара проведенных через две скрещивающиеся прямые плоскостей единственная, причем эти плоскости параллельны.

Вы помните, как доказываются оба утверждения?

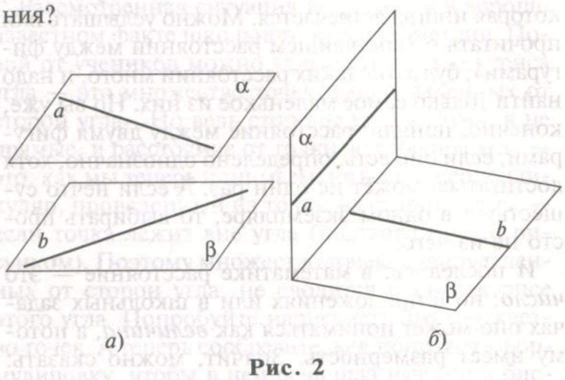

Рис. 2

Утверждение 3. Если скрещивающиеся прямые взаимно перпендикулярны, то существует единственная пара взаимно перпендикулярных плоскостей, каждая из которых проходит через одну из этих прямых (рис. 2, *б*).

На этом рисунке a и b — скрещивающиеся прямые, α и β — перпендикулярные плоскости.

Вспомним также основные свойства ортогонального проектирования на прямую и плоскость.

1. Ортогональное проектирование на плоскость — частный случай параллельного проектирования, когда проектирующая прямая перпендикулярна плоскости проекций.

2. Ортогональное проектирование может осуществляться не только прямыми, но и плоскостями, перпендикулярными плоскости (прямой), на которую ведется проектирование.

Так, на рис. 3 проектирование отрезка AB на плоскость γ осуществляется плоскостями α и β, каждая из которых перпендикулярна плоскости γ. Отрезок A_1B_1 — проекция отрезка AB.

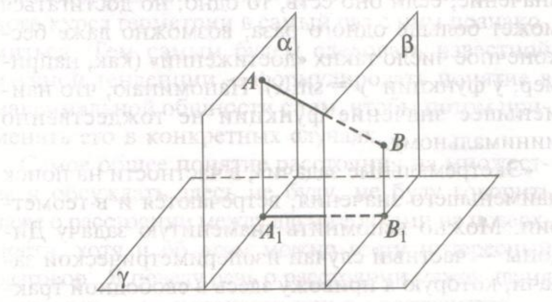

Рис. 3

3. Ортогональное проектирование фигуры на прямую может осуществляться как непосредственно — проведением перпендикуляров к прямой, так и косвенно. Во втором способе мы проводим через данную прямую какую-нибудь плоскость, проектируем на эту плоскость исходную фигуру, а затем полученную проекцию фигуры проектируем на данную прямую.

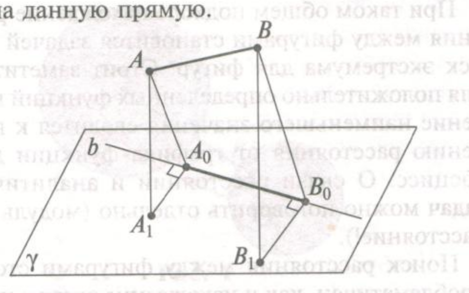

Рис. 4

На рис. 4 показано, как отрезок AB проектируется на прямую b двумя способами: точки A_0 и B_0 прямой b являются проекциями точек A

и B при непосредственном проектировании; они же получаются в результате последовательного проектирования точек A и B на плоскость γ (в точки A_1 и B_1) и последующего проектирования точек A_1 и B_1 на прямую b. Результат в обоих случаях будет один и тот же, он следует из теоремы о трех перпендикулярах (объясните, каким образом). Второй способ, если можно так выразиться, понижает размерность задачи.

4. При ортогональном проектировании на прямую проекцией отрезка является отрезок, в особом случае — точка (что это за случай?). При этом сохраняется порядок точек на отрезке: проекции трех точек отрезка на прямую идут в том же порядке, что и сами точки (рис. 5).

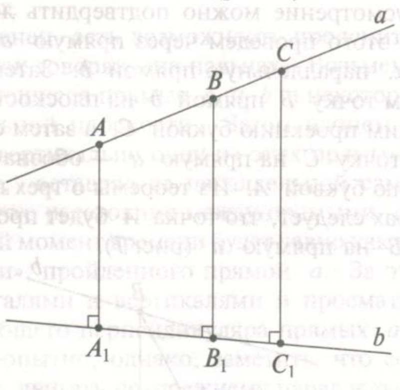

Рис. 5

На этом рисунке точки A_1, B_1, C_1 прямой b являются проекциями точек A, B, C прямой a.

5. Две скрещивающиеся прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда проекция одной из них на другую является точкой.

Из этого следует, что перпендикулярность двух скрещивающихся прямых можно проверить «на глаз», проводя мысленно из двух достаточно далеких точек одной прямой перпендикуляры к другой прямой. Если проекции этих точек разнесены, то данные прямые не перпендикулярны.

6. Проекция отрезка, лежащего на одной из скрещивающихся прямых, на другую прямую равна произведению длины этого отрезка на косинус угла между данными скрещивающимися прямыми.

Отмеченная зависимость очень напоминает формулу для площади ортогональной проекции на плоскость для произвольной плоской фигуры, не правда ли? Попробуете доказать это свойство.

7. Из последнего свойства легко следуют такие утверждения:

1) отношение двух отрезков, лежащих на одной из скрещивающихся прямых, равно отношению их проекций на другую из этих прямых;

2) отношение двух отрезков, лежащих на разных скрещивающихся прямых, равно отношению проекций каждого из них на другую прямую.

Утверждения 1) и 2) легко обобщаются в одно. Какое?

Нам понадобятся и другие сведения из курса геометрии, но о них — по ходу дальнейшего рассказа.

Разыскивается кратчайший отрезок

Итак, требуется выяснить существование кратчайшего отрезка с концами на данных скрещивающихся прямых и узнать, сколько таких отрезков существует.

Сначала установим, что общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых короче любого другого отрезка с концами на данных прямых. Действительно, общий перпендикуляр является проекцией любого другого отрезка с концами на данных прямых (рис. 6).

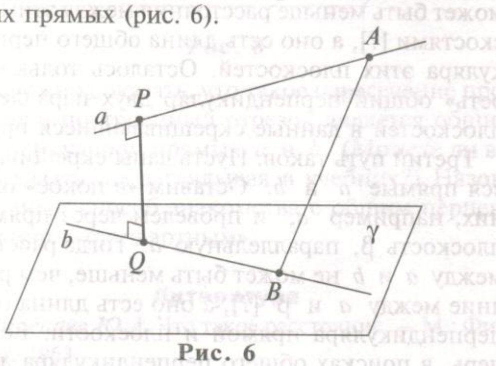

Рис. 6

На этом рисунке PQ — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых a и b, AB — произвольный отрезок с концами на этих прямых.

Проекция же отрезка на плоскость или на прямую не бывает больше самого отрезка, как это следует из свойства 6. Правда, может быть равна ему. Равенство наступает тогда и только тогда, когда отрезок и его проекция на прямую параллельны, что опять же следует из утверждения 6 [?]. В нашем случае это невозможно: если бы отрезок AB и его проекция PQ (будучи параллельными) лежали бы в одной и той же плоскости, то и сами данные прямые лежали бы в этой же плоскости, что противоречит условию.

Итак, общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых (если он существует) является кратчайшим отрезком между этими прямыми.

Более того, такой перпендикуляр один. Напомню, что доказательство единственности какого-либо геометрического объекта — это доказательство того, что таких объектов не может быть больше одного, при этом вопрос о существовании этого одного может пока оставаться открытым. Утверждения о существовании и единственности объекта независимы друг от друга.

В поисках общего перпендикуляра

К идее общего перпендикуляра как кратчайшего отрезка можно прийти разными путями.

Путь первый — по аналогии с тем, что мы имеем для параллельных объектов: параллельных прямых, параллельных прямой и плоскости, параллельных плоскостей. В тех ситуациях общий перпендикуляр сработал, почему бы и здесь не попробовать?

Второй путь сводится к такому рассуждению. Скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях, поэтому расстояние между ними не может быть меньше расстояния между этими плоскостями [?], а оно есть длина общего перпендикуляра этих плоскостей. Осталось только «упереть» общий перпендикуляр двух параллельных плоскостей в данные скрещивающиеся прямые.

Третий путь таков. Пусть даны скрещивающиеся прямые a и b. Оставим «в покое» одну из них, например a, и проведем через прямую b плоскость β, параллельную a. Тогда расстояние между a и b не может быть меньше, чем расстояние между a и β [?], а оно есть длина общего перпендикуляра прямой и плоскости. Если теперь, в поисках общего перпендикуляра данных прямых, проводить всевозможные перпендикуляры из точек прямой a к β, то есть шанс найти среди них нужный нам общий перпендикуляр прямых a и b. А эти всевозможные перпендикуляры задают плоскость, проходящую через a и перпендикулярную β, иначе говоря, плоскость, которая проектирует прямую a на плоскость β.

Четвертый путь — использовать динамические соображения. Пусть нам даны скрещивающиеся прямые a и b. Если мы зафиксируем на прямой b точку B, то кратчайшим отрезком, соединяющим точку B с прямой a, будет перпендикуляр, проведенный из B к a. Если точка B начнет двигаться по прямой b и при каждом ее положении мы будем искать расстояние от нее до прямой a, то таких перпендикуляров будет бесконечное множество, и хорошо бы выбрать из них наименьший — именно он будет «кандидатом» на кратчайший отрезок между прямыми a и b.

Интуитивно ясно, рисунок (сделайте его сами) вроде бы подтверждает, а созерцание в комнате скрещивающихся отрезков между потолком, полом и стенами еще более убеждает нас в том, что если начать двигать точку B «издалека», то перпендикуляр, проведенный из нее к прямой a, будет вначале достаточно большим, потом будет уменьшаться, дойдет до какого-то минимального значения, а затем начнет увеличиваться. А этот минимум (минимум минимумов, так как мы ищем наименьший отрезок среди перпендикуляров к прямой, то есть среди также минимальных отрезков) и даст общий перпендикуляр.

Это усмотрение можно подтвердить логически. Для этого проведем через прямую a плоскость α, параллельную прямой b. Затем спроектируем точку B прямой b на плоскость α — обозначим проекцию буквой C, а затем спроектируем точку C на прямую a — обозначим эту проекцию буквой A. Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что точка A будет проекцией точки B на прямую a (рис. 7).

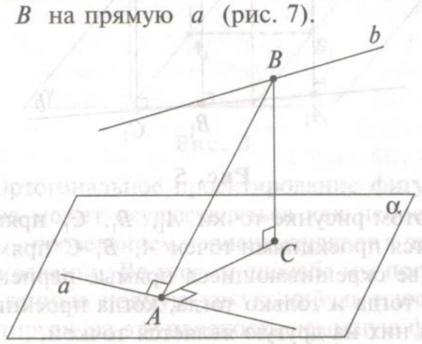

Рис. 7

Запишем теперь равенство $BA^2 = BC^2 + CA^2$ и увидим, что в этой формуле слагаемое BC^2 постоянно (откуда это следует?), а потому расстояние BA будет наименьшим, когда будет наименьшим расстояние CA. А последнее является наименьшим, когда оно равно нулю, т.е. когда точки C и A совпадают. Это происходит тогда, когда проекция точки B на плоскость α попадет на прямую a. Иначе говоря, отрезок BA становится перпендикуляром к плоскости α.

Вот мы и пришли к идее построения общего перпендикуляра для двух скрещивающихся прямых a и b. Надо на прямой b «поймать» такую точку B, проекция которой на плоскость α

попадает на прямую a. Остались вопросы «по мелочам», вроде такого: а что делать, если проекция точки B сразу попадет на прямую a? Вы можете на него ответить?

Пятый путь — «логический». Пусть AB — кратчайший отрезок между скрещивающимися прямыми a и b, причем $A \in a$, $B \in b$. Если предположить, что AB — не перпендикуляр к прямой b, то, проведя перпендикуляр из A к b, мы увидим, что AB вовсе не кратчайший отрезок между этими прямыми. Значит, необходимо, чтобы кратчайший отрезок был перпендикулярен прямой b. Аналогично — прямой a. Итак, в качестве кратчайшего отрезка имеет смысл рассматривать именно общий перпендикуляр данных прямых.

Наконец, есть возможность прояснить ситуацию, как говорят, «на пальцах». Возьмем две пересекающиеся прямые a и b в некоторой горизонтальной плоскости. Затем начнем «поднимать» вертикально одну из этих прямых, например a, оставляя ее параллельной самой себе. Ясно, что расстояние между прямыми a и b в каждый момент времени будет равно как раз «длине пути», пройденного прямой a. За этими горизонталями и вертикалями и просматривается идея общего перпендикуляра прямых a и b.

Любопытно, однако, заметить, что если прямую a двигать по-прежнему параллельно самой себе, но не по вертикали, то при ее удалении от исходной плоскости расстояние между прямыми a и b будет таким же, как если бы прямая a двигалась по вертикали. Подумайте, почему такое возможно. Если придумали, то тем самым получили ответ на задачу пункта б) из разминки.

Осталось доказать существование общего перпендикуляра. Это можно сделать по-разному. В школьном учебнике делают вот что.

Сначала через одну из данных скрещивающихся прямых — пусть это будет прямая a — проводят плоскость α, параллельную другой данной прямой, которую назовем b. Затем на плоскость α ортогонально проектируют прямую b — назовем проекцию b_1 — и фиксируют точку пересечения прямых a и b_1, которую обозначим буквой O. (Вам ясно, почему эти прямые пересекаются?) Далее из точки O проводят перпендикуляр к плоскости α до пересечения его с прямой b (рис. 8).

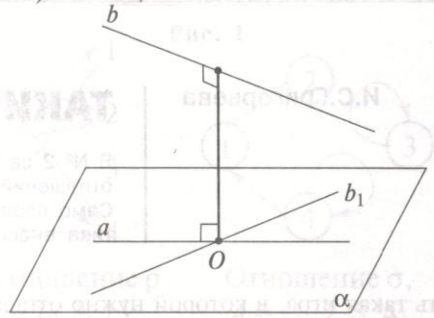

Рис. 8

Несложно доказать, что такое пересечение произойдет и построенный отрезок является общим перпендикуляром прямых a и b. (Можете ли вы это доказать, не заглядывая в учебник?) Назову описанный способ знакомства с общим перпендикуляром «стандартным».

Литература

1. *Шрейдер Ю.А.* Что такое расстояние. — М.: Физматлит, 1963.

2. *Скворцов В.А.* Примеры метрических пространств. — М.: МЦНМО, 2002.

3. *Люстерник Л.А.* Кратчайшие линии. — М.: Гостехиздат, 1955.

(*Продолжение следует.*)