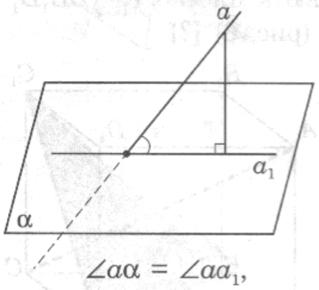
В.И. Рыжик

ОБ УГЛЕ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

В статье подробно рассматриваются важные вопросы стереометрии: угол между прямой и плоскостью, ортогональная проекция. Для закрепления усвоенного предлагаются несложные задачи и устные вопросы.

Вспомним определение

Вспомним, как определяется *угол между прямой и плоскостью* (при условии, что прямая и плоскость пересекаются, но не взаимно перпендикулярны): это угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость (рис. 1).



$\angle a\alpha = \angle aa_1$,
a_1 – проекция прямой a на плоскость α

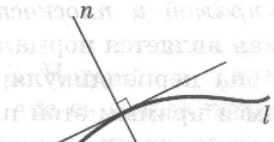
Рис. 1

Из определения ясно, что этот угол понимается как величина (а не как фигура). Так как он сводится к углу между прямыми, то лежит в границах от 0 до 90°. Для придания определению большей общности его дополняют в двух случаях: 1) если прямая параллельна плоскости или лежит в ней, то угол между ними полагают равным 0°; 2) если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними полагают равным 90°.

Для наших целей более содержательна вторая из этих ситуаций — перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр присутствует в определении угла между прямой и плоскостью. Так как проекция появляется уже после того, как проведен перпендикуляр, можно сказать, что он «первее» проекции. Нахождение угла между прямой и плоскостью согласно определению начинается с построения перпендикуляра к плоскости.

Что такое нормаль к плоскости

Для начала уточню терминологию. *Перпендикуляр* — это отрезок; прямую, перпендикулярную плоскости, называют короче — *нормалью* к этой плоскости. Нормаль к плоскости — частный случай нормали к произвольной поверхности. Здесь уместна аналогия с понятием нормали к плоской кривой — так называют прямую, перпендикулярную касательной к этой кривой, проведенную в точке касания (рис. 2).



$n \perp a$,
a – касательная к кривой l

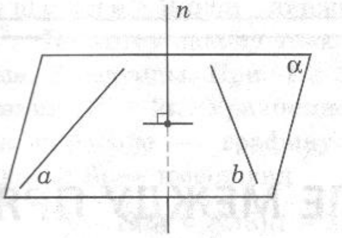
Рис. 2

Понятие нормали к произвольной поверхности выходит за рамки школьного курса геометрии, но нельзя сказать, что вы с ним не знакомы. Нормаль используется в физике, например при нахождении силы давления газа на стенки сосуда (рис. 3) и в законах оптики. Приведу также пример из стереометрии: нормалью к сфере является прямая, проходящая через ее диаметр.

Рис. 3

Замечание 1 (для знатоков). Нормаль к поверхности используется при выводе формул площадей поверхностей по Минковскому. Оказывается при этом, что площадь поверхности является производной от объема по нормали (одно время в наших школьных учебниках так выводили формулы площадей поверхностей цилиндра, конуса и сферы).

Из всего собрания теорем и задач о перпендикулярных прямой и плоскости особое внимание обратим на *признак перпендикулярности прямой и плоскости*. Согласно ему прямая является нормалью к плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости. Замечу, что эти прямые не обязаны проходить через точку пересечения плоскости и нормали (рис. 4).



$$a \subset \alpha,\quad b \subset \alpha,\quad n \perp a,\quad n \perp b \Rightarrow\ \Rightarrow n \perp \alpha$$

Рис. 4

Полезно знать наиболее часто встречающиеся пары «плоскость + нормаль» в основных геометрических фигурах, например нормали к граням и простейшим сечениям в кубе. Пусть дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нормалями к его граням будут прямые, проходящие через соответствующие ребра, нормалью к плоскости BDC_1 будет прямая A_1C (рис. 5) **[?]***, а нормалью к плоскости BB_1D_1 — прямая AC (рис. 6) **[?]**.

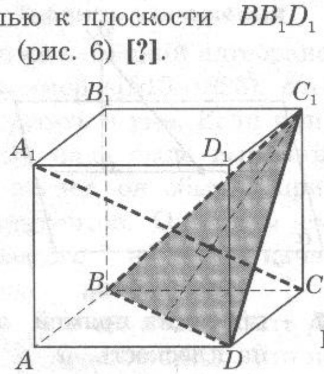


Рис. 5

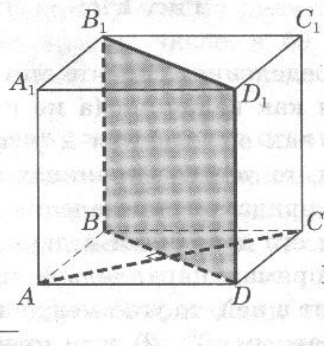


Рис. 6

* Утверждения, отмеченные знаком вопроса, читателю предлагается обосновать самостоятельно.

В других многогранниках упомяну такие пары: в правильном тетраэдре — прямая, соединяющая середины противоположных ребер является нормалью к плоскости сечения, которое является квадратом (рис. 7) [?]. В правильной четырехугольной пирамиде прямая, проходящая через диагональ основания, является нормалью к плоскости сечения, проходящего через другую диагональ основания и высоту пирамиды (рис. 8) [?]. Вы без труда сами найдете другие несложные тому примеры.

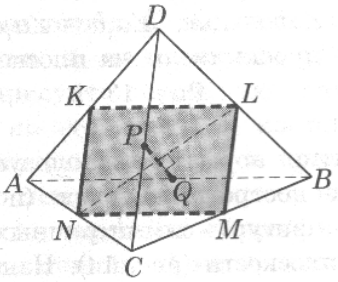


Рис. 7

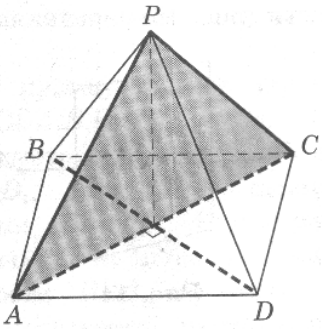


Рис. 8

Замечание 2. Ясно, что плоскость имеет бесконечное число нормалей и все они параллельны между собой. Ясно также, что нормаль к данной плоскости является нормалью к любой плоскости, параллельной данной.

Как построить нормаль к плоскости

Нужно уметь изображать нормаль к плоскости на рисунке. Чаще всего для этого используются такие способы.

1. Если на рисунке уже есть нормаль a к плоскости α, но не там, где нам надо, то нормаль b из нужной точки A проводится параллельно a (рис. 9).

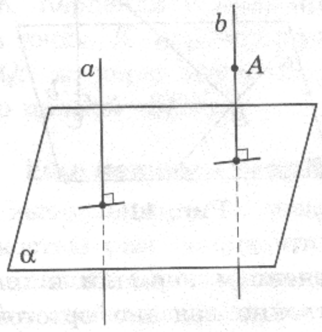


Рис. 9

2. Если на рисунке есть две взаимно перпендикулярные плоскости α и β, то нормаль n к одной из них параллельна другой плоскости (рис. 10*а*), в частном случае лежит в другой плоскости — тогда она пересекает общую прямую p этих плоскостей (рис. 10*б*).

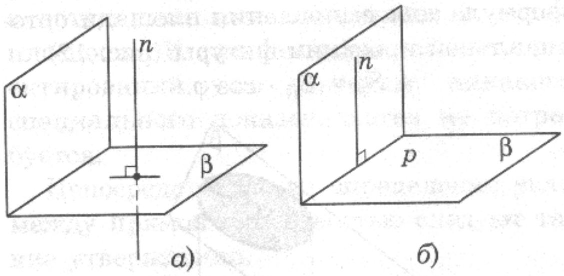


Рис. 10

3. Нормаль к плоскости α из точки A вне ее можно построить «в три шага». Сначала проводят из точки A перпендикуляр AB (первый перпендикуляр) к произвольной прямой a плоскости α.

Потом в плоскости α проводят через точку B прямую b, перпендикулярную прямой a (второй перпендикуляр). Затем из точки A проводят перпендикуляр AC к прямой b (третий перпендикуляр). Несложно доказать, что прямая AC является нормалью к плоскости α (рис. 11) [?].

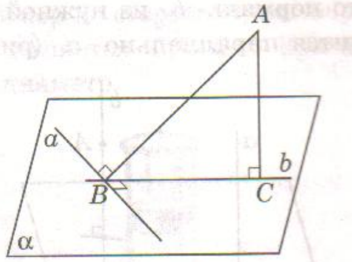
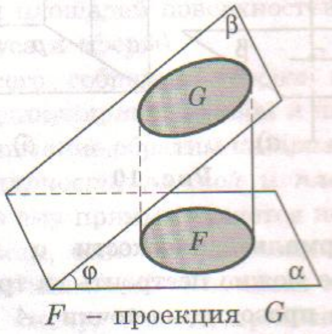


Рис. 11

С проведением нормали к плоскости непосредственно связано ортогональное проектирование на плоскость, свойства которого вытекают из того, что оно является частным случаем параллельного проектирования (хорошо известного из теории — на нем основано выполнение чертежей, расположенных в пространстве фигур). Ортогональное проектирование в теории встречается нечасто, но кое-что вам должно быть известно, например формула для вычисления площади ортогональной проекции фигуры (рис. 12):

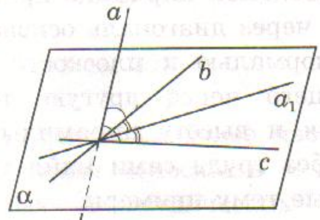
$$S_F = S_G \cdot \cos\varphi.$$



F – проекция G на плоскость α, $\varphi = \angle\alpha\beta$

Рис. 12

Полезно также знать, что проекцией прямой, образующей равные острые углы с двумя другими пересекающимися прямыми, на плоскость, их содержащую, является прямая, проходящая через биссектрису угла между этими двумя прямыми (рис. 13).



$\angle ab = \angle ac$, $\angle a_1b = \angle a_1c$,

a_1 – проекция a на плоскость α

Рис. 13

Понятие нормали используется также для построения точек (и тем самым — фигур), симметричных относительно плоскости (рис. 14). Наконец, построение плоскости, перпендикулярной какой-либо прямой, — задача, в каком-то смысле обратная построению нормали к плоскости (рис. 15).

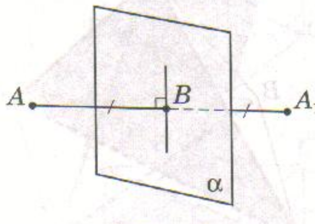
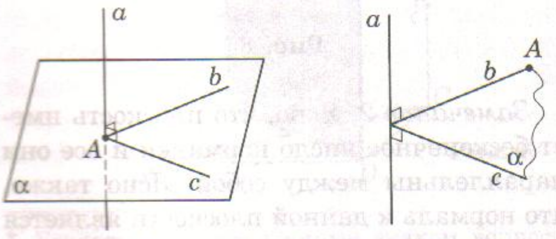


Рис. 14



$A \in \alpha$, $a \perp b$, $a \perp c \Rightarrow \alpha \perp a$

Рис. 15

Задачи для тренировки

Я предлагаю вам ряд несложных задач на построение нормалей, проекций, симметричных точек, перпендикулярных сечений на рисунках указанных в условии фигур.

1. В четырехугольной пирамиде $PABCD$ с равными ребрами точка Q — центр основания, точка K — середина ребра AB. Проведите перпендикуляр: а) из точки A на плоскость BPD; б) из точки D на плоскость APC; в) из точки K на плоскость CPD; г) из точки Q на плоскость APB; д) из точки D на плоскость BCP; е) из точки K на плоскость APD; ж) из точки A на плоскость BPC.

2. Нарисуйте проекцию диагонали куба: а) на его грань; б) на плоскость, параллельную его грани и проходящую через его центр симметрии; в) на диагональную плоскость, в которой не лежит данная диагональ; г) на плоскость, проходящую через три диагонали его граней; д) на плоскость, проходящую через середины его шести ребер; е) на плоскость сечения, являющегося равнобокой трапецией.

3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка O — его центр симметрии, точка K — середина ребра DD_1, точка L — центр симметрии грани AA_1B_1B. Нарисуйте точку, симметричную: а) точке A_1 относительно плоскости BDB_1; б) точке A_1 относительно плоскости, проходящей через середины ребер A_1D_1, B_1C_1, BC; в) точке K относительно плоскости ADC_1; г) точке K относительно плоскости CDL; д) точке O относительно плоскости AB_1C; е) точке O относительно плоскости AKC; ж) точке L относительно плоскости ACC_1; з) точке L относительно плоскости A_1KB_1.

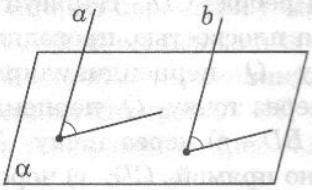
4. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка Q — центр грани ABC, точка K — середина ребра CD. Нарисуйте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей: а) через точку Q перпендикулярно прямой AC; б) через точку Q перпендикулярно прямой BD; в) через точку K перпендикулярно прямой CD; г) через точку K перпендикулярно прямой AB; д) через точку K перпендикулярно прямой BD; е) через точку K перпендикулярно прямой DQ; ж) через точку D перпендикулярно прямой BK.

Еще немного теории

При вычислении угла между прямой и плоскостью нам понадобится понятие ортогонального проектирования на прямую. Его свойства вроде бы очевидны. Например, ясно, что проекцией отрезка на прямую будет отрезок, но хотелось бы иметь доказательство. «В лоб» его провести довольно трудно. Однако можно сослаться на теорему о трех перпендикулярах. Согласно ей проектирование на прямую можно заменить последовательным проектированием: сначала на плоскость, содержащую данную прямую, а затем уже проектированием в самой плоскости. И так как свойства этих проектирований уже известны, никакого специального доказательства не потребуется.

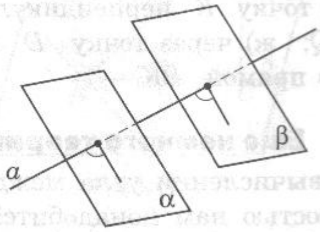
Непосредственно из определения угла между прямой и плоскостью следуют такие утверждения.

Утверждение 1. Угол между прямой и плоскостью инвариантен относительно параллельного переноса данной прямой или данной плоскости. Иначе говоря, если две прямые параллельны, то углы, которые они образуют с данной плоскостью, равны (рис. 16); если две плоскости параллельны, то углы, которые они образуют с данной прямой, равны (рис. 17).



$a \parallel b \Rightarrow \angle a\alpha = \angle b\alpha$

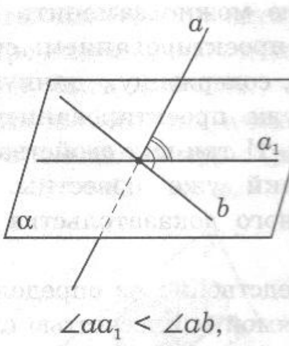
Рис. 16



$\alpha \parallel \beta \Rightarrow \angle a\alpha = \angle b\alpha$

Рис. 17

Утверждение 2. Если прямая не перпендикулярна плоскости, то угол между прямой и плоскостью — наименьший из углов, который данная прямая образует с прямыми плоскости (рис. 18).



$\angle aa_1 < \angle ab,$

a_1 – проекция прямой a на плоскость α

Рис. 18

Оказывается, нахождение такого угла сводится к нахождению минимума — мы ищем на плоскости прямую, которая меньше всего отклоняется от заданной прямой, пересекающей данную плоскость. И этой прямой является проекция! Как бы мы не считали эту ситуацию привычной — результат замечательный.

Аналитическое решение этой экстремальной задачи вызывает «технические» трудности. В дальнейшем вы убедитесь в этом, разобрав решение задачи 6 (ее сугубо геометрическое решение очевидно).

Утверждение 3. Угол φ между прямой и плоскостью и угол ψ между этой прямой и нормалью к данной плоскости составляют в сумме 90° (рис. 19).

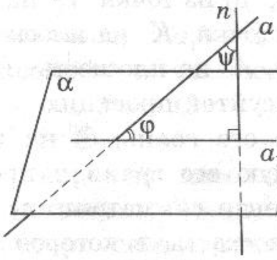


Рис. 19

Утверждение 4. Множество прямых, имеющих общую точку и составляющих с плоскостью заданный острый угол, является двуполостной бесконечной конической поверхностью (рис. 20).

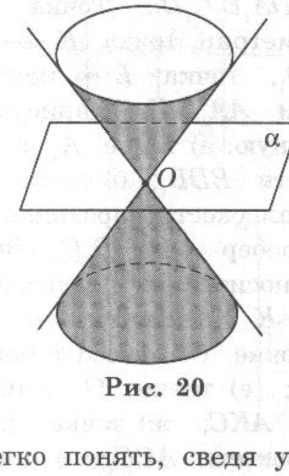


Рис. 20

Это легко понять, сведя угол между прямой и плоскостью к углу между этой прямой и нормалью к данной плоскости. Такая поверхность — пространственный аналог плоского угла между двумя пересекающимися прямыми. Ее легко вообразить, представив одну из двух пересекающихся прямых вращающейся вокруг другой.

Устные вопросы

Переходим от теории к практике.

Прежде всего требуется «разбудить» пространственное мышление. Для этого предлагаю вам устно (или полуустно), иногда даже ничего не рисуя, ответить на такие вопросы.

1. Какой из пронумерованных на рис. 21 углов является углом между прямой и плоскостью?

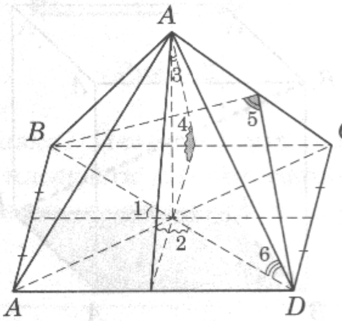


Рис. 21

2. Угол между двумя прямыми равен φ. К одной из этих прямых проведена перпендикулярная ей плоскость. Какой угол образует с этой плоскостью другая прямая?

3. Две плоскости взаимно перпендикулярны. Прямая пересекает каждую из них, причем известно, под каким углом она пересекает одну из плоскостей. Можно ли узнать, под каким углом она пересекает другую плоскость?

4. Две плоскости взаимно перпендикулярны. Прямая пересекает каждую из них, угол между этой прямой и одной из плоскостей увеличивается. Что происходит при этом с углом между этой прямой и другой плоскостью?

5. Две прямые пересекаются под прямым углом. Одна из них пересекает данную плоскость под острым углом φ. В каких границах лежит угол между другой прямой и данной плоскостью?

6. Две плоскости пересекаются под прямым углом. Угол между одной из них и данной прямой увеличивается. Что происходит при этом с углом между другой плоскостью и данной прямой?

7. Две плоскости пересекаются. В каждой из них взято по точке. Докажите, что эти точки равноудалены от прямой пересечения плоскостей тогда и только тогда, когда прямая, проходящая через эти точки, образует равные углы с данными плоскостями.

8. Имеются две пересекающиеся плоскости α, β и к каждой из них проведена нормаль. Нормаль к плоскости α пересекает плоскость β, а нормаль к плоскости β пересекает плоскость α. Верно ли, что угол между нормалью к плоскости α и плоскостью β равен углу между нормалью к плоскости β и плоскостью α?

9. Имеется прямой трехгранный угол (то есть все его плоские углы — прямые). Плоскость пересекает все его ребра. Известны углы, которые эта плоскость образует с двумя ребрами трехгранного угла. Можно ли найти угол, который она образует с третьим его ребром?

10. Дан равносторонний цилиндр (то есть его осевое сечение является квадратом).

а) На одном из оснований цилиндра фиксирована точка A. Проводятся всевозможные хорды цилиндра, один конец которых — точка A (здесь хорда — это отрезок с концами на разных основаниях цилиндра). В каких границах лежит угол между этими хордами и плоскостью основания цилиндра?

б) Через центр симметрии цилиндра проведена хорда. В каких границах лежит угол между этой хордой и всевозможными осевыми сечениями цилиндра?

в) Зафиксировано осевое сечение цилиндра. В каких границах лежит угол между ним и всевозможными хордами цилиндра, выходящими из центра его основания?

11. Дан равносторонний конус (то есть его осевое сечение является равносторонним треугольником).

а) Зафиксировано осевое сечение конуса. В каких границах лежит угол между всевозможными образующими поверхности конуса и плоскостью этого сечения?

б) Рассматриваются всевозможные треугольные сечения конуса, пересекающие основание по параллельным хордам. В каких границах лежит угол между высотой конуса и таким сечением?

в) Рассматриваются всевозможные треугольные сечения конуса, проходящие через фиксированную точку основания. В каких границах лежит угол между высотой конуса и таким сечением?

12. а) Две точки лежат на сфере радиуса 1. Одна точка лежит на широте 30°, другая точка — на широте 60°. В каких границах находится расстояние между ними? (Напоминаю: широта точки на сфере — это угол, который образует радиус сферы, проведенный в данную точку, с плоскостью экватора.)

б) На сфере с центром O проведены три большие окружности, плоскости которых попарно перпендикулярны между собой. Луч OX образует с плоскостями этих окружностей один и тот же угол. Какую фигуру на сфере образуют все такие точки X?

Нахождение угла между прямой и плоскостью с помощью определения

Перейдем к вычислению угла между прямой и плоскостью согласно определению. Задачу решить несложно, когда в рассматриваемом многограннике прямая и плоскость задаются его вершинами и пересекаются в одной из вершин, да к тому же с нормалью нет проблем. Вот типичный пример.

Задача 1. Найдите угол между прямой DB_1 и плоскостью ABC в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 22).

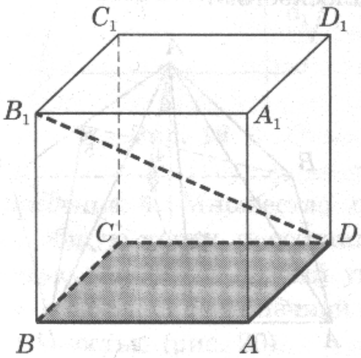


Рис. 22

Подсказка. Сначала надо найти на рисунке нормаль к плоскости ABC. Может быть, она уже проведена? Таких нормалей несколько **[?]**. Подходящей нормалью будет прямая B_1B **[?]**, тогда проекцией прямой DB_1 будет прямая DB, а потому искомый угол — это угол B_1DB.

Замечание 3. В этой статье, как и в предыдущих, я не даю ответов в задачах на вычисление, ведь на экзаменах ответов не будет. Учитесь проверять полученные результаты. Лучшая проверка — другой способ решения.

Замечание 4. В этой и подобной ей задачах при нахождении угла можно считать куб единичным или принять длину ребра куба равной a — результат будет один и тот же. В самом деле, все кубы подобны, а подобие сохраняет величину угла.

Задача 2. Найдите угол между прямой CD_1 и плоскостью AB_1D_1 в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

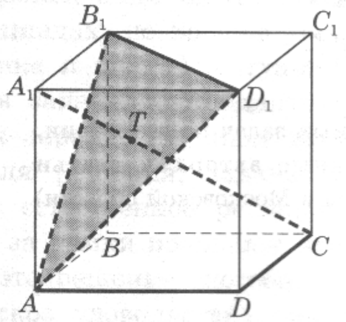


Рис. 23

Подсказка. Известно, что нормалью к такой плоскости служит соответствующая прямая, проходящая через диагональ куба. В данном случае нормалью к плоскости AB_1D_1 является прямая CA_1. Известно также, что эта прямая пересекает правильный треугольник AB_1D_1 в центре — точке T (рис. 23) [?]. Тогда проекцией прямой CD_1 на плоскость AB_1D_1 будет прямая TD_1, а искомый угол — это угол CD_1T.

Следующая задача – для самостоятельного решения.

Задача 3. Найдите угол между прямой B_1D и плоскостью сечения BCD_1A_1 в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Литература

1. *Рыжик В.И.* О расстоянии вообще и расстоянии между скрещивающимися прямыми в частности // Математика для школьников. — 2007. — № 4; 2008. — № 1.

2. *Рыжик В.И.* Об углах между скрещивающимися прямыми и немного о прочих углах // Математика для школьников. — 2008. — № 3, 4.

(*Продолжение следует.*)