В.И.Рыжик

ОПЯТЬ ОБ УГЛАХ. УГОЛ ДВУГРАННЫЙ

Окончание. Начало см. в № 2 и 3 за 2009 г.

Использование теоремы синусов для трехгранного угла при вычислении угла между плоскостями

Настала очередь поработать этой теореме, точнее ее следствию. Формула для теоремы синусов такова (в тех же обозначениях, что и теорема косинусов):

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \qquad (12)$$

Здесь A и B — двугранные углы трехгранного угла, α и β — противолежащие им соответственно плоские углы (см. рис. 9 из первой части статьи в № 2 за 2009 г.).

Теорема синусов для трехгранного угла — аналог теоремы синусов для треугольника. Вместо сторон треугольника рассматриваются плоские углы трехгранного угла, а вместо углов треугольника — двугранные углы трехгранного угла.

Замечание 14 (для знатоков). И теорему косинусов, и теорему синусов для трехгранного угла можно получить, основываясь на понятии векторного произведения.

Следствие. Если в трехгранном угле есть прямой двугранный угол, то синус другого двугранного угла равен отношению синуса противолежащего ему угла к синусу угла, противолежащего прямому двугранному углу **[?]**.

Пусть угол B прямой, тогда выполняется равенство

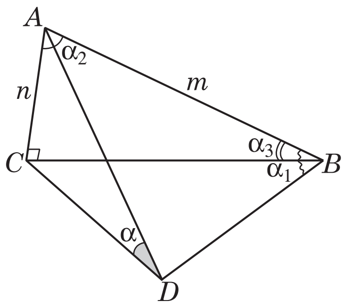
$$\sin A=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \qquad (13)$$

Из него видно, что можно находить острый двугранный угол, рассматривая его как часть такого трехгранного угла, в котором есть прямой двугранный угол.

Замечание 15. При вычислении двугранного угла по теореме косинусов для трехгранного угла нет необходимости иметь трехгранный угол с прямым двугранным углом. Тем самым ясно, что теорема косинусов (формула (1) из первой части статьи) имеет более общий характер, чем теорема синусов (формула (12)). Однако формула (1) требует знания всех трех плоских углов трехгранного угла, а формула (13) — только двух.

И еще одна тонкость. Теорема косинусов дает нам значение косинуса, которое может быть меньше нуля, иначе говоря, величину двугранного угла, который может оказаться тупым. Теорема синусов дает нам значение синуса, которое не может быть отрицательным числом, т.е. позволят найти значение лишь нетупого угла, который может быть только углом между плоскостями. Будет ли этот синус давать значение двугранного угла — еще вопрос: откуда-то надо знать, каким по виду является интересующий нас угол.

Из формулы (13) быстро получается еще одна формула для вычисления двугранного угла, с которой нам предстоит работать. Посмотрите на рис. 1.



$$\sin\varphi = \frac{\sin\varphi_3}{\sin\varphi_1} = \frac{\cos\varphi_2}{\sin\varphi_1}.$$

Рис. 1

На этом рисунке m — прямая в плоскости $\alpha = (BAD)$, не перпендикулярная прямой BD, n — нормаль к плоскости $\beta = (BCD)$; φ — линейный угол двугранного угла между плоскостями α и β; φ_1 — угол между прямыми m и BD, φ_2 — угол между прямой m и нормалью n к плоскости β, φ_3 — угол между прямой m и ее проекцией на плоскость β (т.е. угол между прямой m и плоскостью β). Тогда

$$\sin\varphi = \frac{\cos\varphi_2}{\sin\varphi_1}. \qquad (13^*)$$

Доказательство. Рассмотрим трехгранный угол с вершиной B и ребрами BA, BD, BC. Плоскости его граней BAC и BDC взаимно перпендикулярны, т.е. двугранный угол при ребре BC — прямой. Согласно формуле (13) $\sin\varphi = \dfrac{\sin\varphi_3}{\sin\varphi_1}$, откуда $\sin\varphi = \dfrac{\cos\varphi_2}{\sin\varphi_1}$.

Формулу (13*) можно получить и без ссылки на следствие из теоремы синусов для трехгранного угла. Достаточно рассмотреть три синуса в прямоугольных треугольниках ABD, ABC, ACD **[?]**.

Теперь я покажу, как формулу (13*) можно применить при решении задач. Для начала — очень простой пример, чтобы прочувствовать, как эта формула «работает».

Задача 39. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, в которой все ребра равны. Чему равен угол между плоскостями боковых граней (рис. 2)?

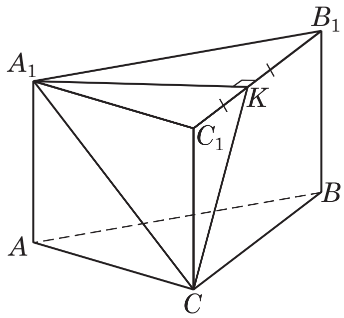


Рис. 2

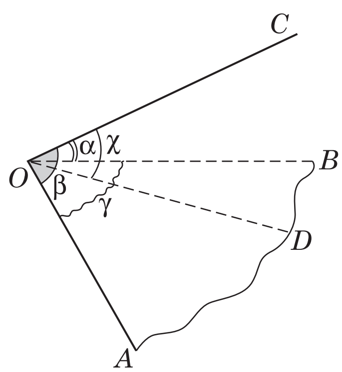
Подсказка. Ответ очевиден. Тем легче проверить полученную нами формулу. Пусть мы ищем угол между плоскостями A_1CC_1 и BCC_1. Нам нужны три прямые: прямая, по которой пересекаются данные плоскости, — это прямая CC_1, прямая в одной из этих плоскостей — пусть это будет CA_1 и нормаль к другой из этих плоскостей — пусть это будет прямая KA_1. Остаются только вычисления. Пусть φ — искомый угол, φ_1 — угол между прямой CA_1 плоскости A_1CC_1 и прямой CC_1 пересечения плоскостей (угол A_1CC_1), φ_2 — угол между прямыми CA_1 и A_1K, он легко находится **[?]**. Дальше решайте сами.

Задача 40. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, в которой все ребра равны. Чему равен угол между плоскостью основания и плоскостью сечения BCA_1?

Задача 41. В тетраэдре $DABC$ ребро CD перпендикулярно основанию ABC. В основании тетраэдра лежит прямоугольный треугольник. При этом $AC = BC = 2CD$. Чему равны углы, которые составляет грань ABD с другими гранями?

Выше я сказал, что теорема синусов позволяет находить не только двугранный угол, она позволяет также нестандартно найти угол между прямой и плоскостью. Рассмотрим такую задачу.

Задача 42. Пусть дан прямой трехгранный угол (т.е. один его двугранный угол — прямой). Известны все его плоские углы. Чему равен угол между ребром прямого двугранного угла и противолежащей гранью (рис. 3)?



$(AOC) \perp (BOC)$, $x = \angle(OC, (OAB))$

Рис. 3

Решение. Пусть луч OD является проекцией ребра OC трехгранного угла $OABC$ на плоскость OAB. Запишем формулу теоремы синусов для трехгранного угла с ребрами OC, OD, OA:

$$\frac{\sin x}{\sin\beta} = \frac{\sin A}{\sin D}.$$

Так как угол D — прямой, получим, что

$$\sin x = \sin\beta \sin A. \qquad (14)$$

Проделаем то же для трехгранного угла с ребрами OC, OA, OB:

$$\frac{\sin x}{\sin\gamma} = \frac{\sin A}{\sin C}.$$

Так как угол C — прямой, получим, что

$$\sin A = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}. \qquad (15)$$

Найденное выражение для $\sin A$ подставим в равенство (14) и получим нужную нам формулу

$$\sin x = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}. \qquad (16)$$

Попробуйте выразить ее словесно. Ответьте также на такие вопросы.

1. Может ли рисунок к этой задаче быть иным, т.е. может ли луч OD лежать вне плоского угла AOB?

2. Как выглядит соответствующая формула, если трехгранный угол не будет прямым?

3. К каким результатам можно прийти, если рассмотреть совместно формулы (14) и (16)?

Задача 43. Какой угол составляет ребро куба с плоскостью, проходящей через три такие диагонали его граней, что две из них имеют с этим ребром общую точку?

Задача 44. Какой угол составляет ребро прямоугольного параллелепипеда размером $a \times b \times c$ с плоскостью, проходящей через три диагонали его граней такие, что две из них имеют с этим ребром общую точку?

Если вы вернетесь к задаче 21 (см. вторую часть статьи в № 3 за 2009 г.), то с помощью теоремы синусов решите ее в одну строчку.

Использование метода координат при вычислении угла между плоскостями

Наиболее общий метод нахождения угла между плоскостями — метод координат (иногда — с привлечением векторов). Его можно использовать тогда, когда испробованы все остальные. Но бывают ситуации, в которых метод координат имеет смысл применять сразу же, а именно тогда, когда система координат естественно связана с многогранником, указанным в условии задачи, т.е. явно просматриваются три попарно перпендикулярные прямые, на которых можно задать оси координат. Такими многогранниками являются прямоугольный параллелепипед и правильная четырехугольная пирамида. В первом случае система координат может быть задана выходящими из одной вершины ребрами (рис. 4, *а*), во втором — высотой и диагоналями основания (рис. 4, *б*).

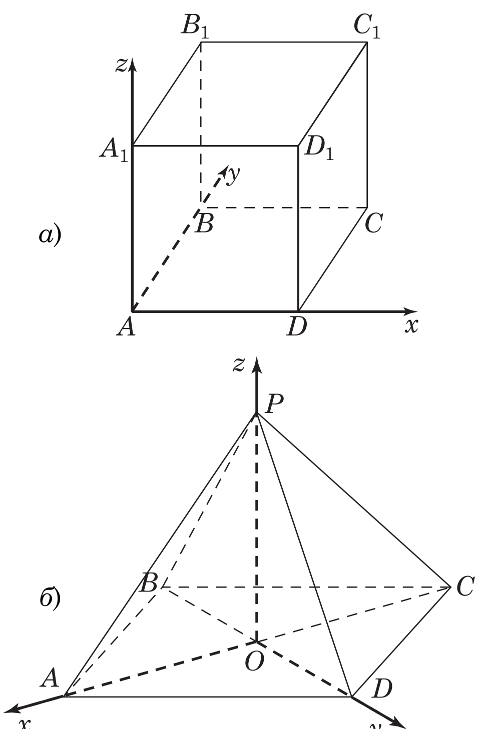


Рис. 4

Применение метода координат состоит в следующем.

1. Вводится прямоугольная система координат в пространстве. Желательно ввести ее «естественным» образом – «привязать» к тройке попарно перпендикулярных прямых, имеющих общую точку.

2. Для каждой из плоскостей, угол между которыми ищется, составляется уравнение. Проще всего составить такое уравнение, зная координаты трех точек плоскости, не лежащих на одной прямой.

3. Уравнение плоскости в общем виде имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$.

Коэффициенты A, B, C в этом уравнении являются координатами нормального вектора плоскости (вектора, перпендикулярного плоскости). Определяем затем длины и скалярное произведение нормальных векторов к плоскостям, угол между которыми ищется. Если координаты этих векторов $(A_1; B_1; C_1)$ и $(A_2; B_2; C_2)$, то искомый угол φ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Замечание 16. Необходимо помнить, что угол между векторами (в отличие от угла между плоскостями) может быть тупым, и чтобы избежать возможной неопределенности, в числителе правой части формулы стоит модуль.

Решите методом координат такую задачу.

Задача 45. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K — середина ребра AD, точка L — середина ребра CD. Чему равен угол между плоскостями A_1KL и A_1AD?

Решение. Пусть начало системы координат находится в точке A, а оси координат идут вдоль лучей AD, AB, AA_1 (рис. 5). Ребро куба примем равным 2 (удобно делить пополам). Тогда координаты точек A_1, K, L таковы: $A_1(0;\ 0;\ 2)$, $K(1;\ 0;\ 0)$, $L(2;\ 1;\ 0)$.

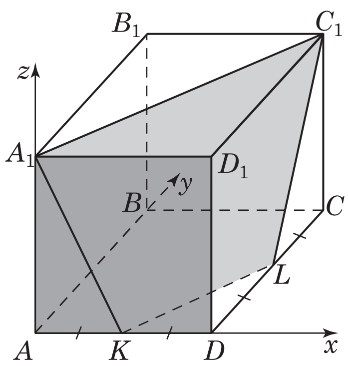


Рис. 5

Запишем уравнение плоскости A_1KL в общем виде. Затем подставим в него координаты выбранных точек этой плоскости. Получим систему трех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} 2C+D=0 \\ A+D=0 \\ 2A+B+D=0. \end{cases}$$

Выразим коэффициенты A, B, C через D и придем к уравнению

$$-Dx+Dy-\frac{D}{2}z+D=0.$$

Разделив обе его части на D (почему $D \neq 0$?) и домножив затем на -2, получим уравнение плоскости A_1KL: $2x-2y+z-2=0$. Тогда нормальный вектор к этой плоскости имеет координаты $(2; -2; 1)$ **[?]**. Уравнение плоскости A_1AD таково: $y=0$ **[?]**, а координаты нормального вектора к ней, например, $(0;\ 2;\ 0)$ **[?]**. Согласно приведенной выше формуле для косинуса угла φ между плоскостями получаем: $\cos\varphi=\frac{2}{3}$.

Задача 46. В четырехугольной пирамиде $PABCD$ все ребра равны. Точка K — середина ребра PC. Точка L — середина ребра AD. Точка M — середина ребра AB. Чему равен угол между плоскостями BDK и PLM?

Перпендикулярность плоскостей

Перпендикулярность плоскостей в пространстве как бы растраивается. С одной стороны, взаимно перпендикулярные плоскости образуют прямой двугранный угол, поэтому можно сказать, что это такие плоскости, угол между которыми равен 90°. С другой стороны, перпендикулярные плоскости в пространстве — вполне самостоятельная фигура; она имеет определение, не зависящее от величины угла. Наконец, с третьей стороны, перпендикулярность плоскостей в пространстве — некое отношение на множестве плоскостей, которое может изучаться само по себе.

При установлении перпендикулярности плоскостей можно использовать все способы, с помощью которых мы находили двугранный угол или угол между плоскостями. При этом безразлично, находим мы двугранный угол или угол между плоскостями **[?]**.

Я выделю два вида задач.

Во-первых, на проверку перпендикулярности плоскостей с помощью вычислений по формулам. В частности, на выяснение возможности перпендикулярности сечений в многограннике. Во-вторых, на построение взаимно перпендикулярных плоскостей.

Для «разминки» поупражняйтесь на таких задачах.

1. Укажите взаимно перпендикулярные плоскости, заданные вершинами: а) куба; б) четырехугольной пирамиды, у которой все ребра равны.

2. Докажите, что биссекторы двугранных углов трехгранного угла не взаимно перпендикулярны.

Задача 47. Будут ли взаимно перпендикулярны плоскости BA_1C_1 и BB_1D_1 в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

Задача 48. В четырехугольной пирамиде $PABCD$ с квадратным основанием $ABCD$ ребро PA перпендикулярно основанию и равно его стороне, точка Q — середина ребра PC. Будут ли взаимно перпендикулярны плоскости: а) PAB и PAD; б) PAB и DBC; в) PBC и PAB; г) PAC и DBC; д) PDC и DBC; е) DPQ и DBC; ж) PBC и APQ?

Задача 49. В правильном тетраэдре $ABCD$ проведены два сечения: AKL и DPQ, где точки K, L, P, Q — середины ребер BD, CD, AB, BC соответственно. Будут ли эти сечения взаимно перпендикулярны?

Подсказка. Нарисуйте отрезок MN, по которому пересекаются эти сечения. Двугранный угол с ребром MN находится в тетраэдре $DMNK$, в котором все ребра можно вычислить, приняв ребро исходного правильного тетраэдра равным 2. Используя достаточное условие перпендикулярности плоскостей и формулу (2) (см. первую часть статьи), выясните, будет ли этот двугранный угол прямым.

Задача 50. Дана правильная треугольная пирамида $PABC$. Точка K принадлежит ребру BP, точка L принадлежит ребру AP. Могут ли быть взаимно перпендикулярными плоскости KAC и LBC сечений тетраэдра, если с основанием ABC они образуют один и тот же угол?

Подсказка. Пусть эти плоскости пересекаются по прямой CM. Сначала докажите, что прямая CM образует равные углы с прямыми CA и CB. Затем найдите двугранный угол между этими сечениями с ребром CM и примените формулу (2) для трехгранного угла с вершиной C и ребрами CA, CB, CM.

Задача 51. Через точку на ребре правильного тетраэдра провели два прямоугольных сечения. Будут ли эти сечения взаимно перпендикулярны?

Решение. Любопытно, что задачу можно решить устно. В самом деле, каждая из проведенных плоскостей параллельна квадратному сечению данного тетраэдра. Таких сечений в правильном тетраэдре три. Угол между квадратными сечениями тетраэдра равен углу между нормалями к этим сечениям. Нормали можно взять проходящими через середины противоположных ребер тетраэдра. Но в этом случае они являются диагоналями третьего квадратного сечения правильного тетраэдра, а потому взаимно перпендикулярны. Итак, проведенные сечения взаимно перпендикулярны всегда.

Практическое применение двугранного угла

Пусть нам требуется найти расстояние между двумя пунктами на Земле, например между Петербургом и Москвой. Ясно, что нам понадобится находить расстояние на поверхности шара, т.е. сфере. Нам понадобятся какие-то приближения. Будем считать Землю шаром, а Петербург и Москву — точками на его поверхности.

Вам, может быть, известно, что расстояние на поверхности шара измеряется по наименьшей дуге большой окружности шара, проходящей через две выбранные точки. (Напомню, что центр большой окружности шара находится в центре шара, а радиус ее — радиус шара.) Иначе говоря, дуга окружности, соединяющая две точки на сфере, будет самой короткой тогда, когда она является дугой большой окружности.

Это не слишком очевидно, но есть соответствующая теорема, которая непросто доказывается. Проверим это численным экспериментом.

Но сначала — немного теории. Положение точки на земной поверхности задается географическими координатами: долготой и широтой. Долгота (восточная или западная) точки (на сфере) – это отклонение плоскости окружности, проходящей через полюса и данную точку, от плоскости Гринвичского (нулевого) меридиана; тем самым, долгота — двугранный угол между этими плоскостями. Широта точки (на сфере) — это отклонение радиуса, проведенного из центра шара в данную точку, от экваториальной плоскости. Тем самым, широта — это угол между прямой и плоскостью.

Пусть географические координаты точки A таковы: долгота — α, широта — φ_1, а географические координаты точки B таковы: долгота — β, широта — φ_2. Нам требуется определить длину дуги AB. Так как AB — дуга окружности, то для нахождения ее длины достаточно найти угол, под которым дуга видна из центра круга — точки O, т.е. угол между радиусами OA и OB большой окружности, а он является плоским углом трехгранного угла с вершиной O и ребрами OA, OB, OC (OC — луч, выходящий из центра шара и проходящий через северный полюс C).

Теперь применяем теорему косинусов для трехгранного угла. Получаем:

$$\cos\angle OC = \frac{\cos\angle AOC - \cos\angle COB\cos\angle COA}{\sin\angle COB\sin\angle COA}.$$

Иначе,

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\cos x - \cos(90° - \beta)\cos(90° - \alpha)}{\sin(90° - \beta)\sin(90° - \alpha)}.$$

Отсюда

$$\cos x = \sin(90^\circ - \beta)\sin(90^\circ - \alpha)\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos(90^\circ - \beta)\cos(90^\circ - \alpha).$$

Зная $\cos x$, найдем угол x, а затем и длину дуги AB. Здесь хорошо бы взять дугу другой окружности, проходящей через точки A и B, и показать, что первая найденная нами дуга короче второй.

Такова теория. На практике мы рассмотрим более простую задачу. Пусть два пункта на Земле имеют одинаковую широту, например 60°, и долготу 30° и 45° соответственно. Подставьте эти значения в формулу теоремы косинусов и найдите угол x (с помощью калькулятора).

В качестве другой дуги, которую мы хотим сравнить по длине с рассмотренной, возьмем ту дугу AB, которая вся лежит на широте 60°. Долгота точки A равна 30°, а точки B — 45°. Угол, под которым дуга AB видна из центра окружности, соответствующей широте 60°, равен разности 45° и 30°, т.е. 15°. Радиус этой окружности вычислить несложно **[?]**, а длина дуги находится по известной формуле длины дуги окружности **[?]**.

Любопытно, что радиус Земли, который вроде бы необходим для вычисления длин дуг, на самом деле не существен для решения нашей задачи, ведь нас интересуют не сами длины дуг, а результат их сравнения. Такое сравнение можно провести, обозначив радиус Земли буквой R. Если сравнивать длины «делением» (рассмотреть отношение длин дуг), то радиусы сократятся.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. *Экстремальное свойство линейного угла.* а) Если плоский угол задан двумя лучами, лежащими в гранях двугранного угла по разные стороны от плоскости линейного угла, то такой угол больше линейного. б) Из всех лучей, лежащих в одной грани двугранного угла, наибольший угол с другой гранью образует луч линейного угла, перпендикулярный ребру двугранного угла. Докажите.

Задача 2. Существует ли плоскость, которая пересекает грани трехгранного угла под равными углами?

Задача 3. Пусть известны углы, которые образует плоскость с двумя гранями трехгранного угла. Можно ли в таком случае найти угол, который она образует с третьей его гранью?

Задача 4. Из какой точки на ребре двугранного угла виден под прямым углом отрезок, концы которого лежат на его гранях?

Задача 5. На расстоянии d от шара радиуса r находится прямая. Через эту прямую проводятся две плоскости, касательные к данному шару. Чему равен угол между этими плоскостями?

Задача 6. Угол в осевом сечении конуса равен α. Угол между двумя образующими поверхности равен β. Через эти образующие проводятся плоскости, касательные к этому конусу. Чему равен угол между ними?

Задача 7. Имеются два равных равносторонних конуса. Чему равен угол между плоскостями их оснований, если: а) конусы имеют общую вершину и общую образующую; б) конусы имеют общую вершину, а их основания имеют общую хорду, равную радиусу оснований?

Задача 8. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами a, b, c. Чему равны углы между его диагональными сечениями: а) не проходящими через одну и ту же его диагональ; б) проходящими через одну и ту же его диагональ?

Задача 9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, у которой боковое ребро равно ребру основания, проведена плоскость BKL, где точка K — середина ребра AC, а точка L — середина ребра CC_1. Найдите углы, которая эта плоскость образует с гранями призмы.

Задача 10. Через вершину A, точку K — середину ребра DB и точку L — середину ребра DC правильного тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость. Какие углы она образует с гранями тетраэдра?

Задача 11. Дана правильная n-угольная пирамида. Найдите формулу, связывающую ее плоский угол при вершине и двугранный угол при боковом ребре.

Задача 12. Чему равен двугранный угол при основании правильной n-угольной пирамиды, у которой совпадают центры вписанной и описанной сфер?

Задача 13. На плоскости лежат три равных конуса (т.е. плоскость проходит через образующую поверхности каждого конуса и других общих точек ни с одним из них не имеет). Все конусы имеют общую вершину и каждый из них имеет общую образующую поверхности с каждым из двух других конусов. Какой угол образует основание каждого конуса: а) с данной плоскостью; б) с плоскостью основания каждого из двух других конусов?

Задача 14. Из стоящего на столе сосуда в форме полушара, доверху заполненного водой, требуется отлить половину воды. На какой угол требуется отклонить для этого сосуд?

Задачи повышенного уровня сложности

Вот несколько задач об углах в пространстве, которые были на приемных экзаменах (в различные университеты и вузы) с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов.

Задача 1. В правильной четырехугольной пирамиде угол при основании равен α. Найдите двугранный угол при боковом ребре.

Ответ: $2\arcsin\sqrt{\dfrac{1+\cos^2\alpha}{2}}$.

Подсказка. Дважды рассмотрите трехгранный угол, вершина которого находится в вершине основания, а ребра идут по ребрам пирамиды, выходящим из этой вершины. Оба раза примените теорему косинусов для трехгранного угла.

Задача 2. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра AB, BC, BS имеют длину, равную 2, и взаимно перпендикулярны. Через середины ребер AC и SB проводится плоскость, пересекающая ребро AB и образующая равные углы с плоскостями граней ABS и ABC. Найдите величины этих углов.

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{5}$.

Подсказка. Введите систему координат с началом в точке B и осями BA, BC, BS. Найдите уравнение секущей плоскости. С помощью векторов, используя нормали и скалярное произведение, найдите координаты точек пересечения этой плоскости с осями координат. Рассмотрите тетраэдр с вершинами в точках B, середине ребра BS и двух полученных точках пересечения. В этом тетраэдре можно вычислить все ребра. После этого можно найти искомые углы.

Задача 3. В основании пирамиды $SABCD$ с вершиной S лежит равнобокая трапеция с меньшим основанием $AB = a$ и острым углом α. Высота SO пирамиды равна h. Прямая AO пересекает сторону CD основания в точке K, являющейся ее серединой. Найдите угол, между боковой гранью SBC и плоскостью основания, если $AO : OK = 8 : 1$ и $\angle AOB = 90^\circ$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{9h}{a(5\sin\alpha+2\sqrt{5}\cos\alpha)}$.

Подсказка. Для решения задачи достаточно построить линейный угол при ребре BC, проведя к нему перпендикуляр из точки O. Тогда задача сведется к планиметрической, для ее решения надо рассмотреть трапецию $ABCD$.

Задача 4. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$, $BC = 2$. Длины всех боковых ребер равны 3, точка M — середина AS. Через прямую BM параллельно диагонали AC проведена плоскость. Определите величину угла между этой плоскостью и плоскостью SAC.

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{5}$.

Подсказка. Проведите данное сечение и получите треугольник BMN. Затем рассмотрите трехгранный угол с вершиной в точке M и ребрами MB, MN, MS. Примените теорему косинусов для этого трехгранного угла.

Задача 5. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$. Острые углы D_1DA и D_1DC равны между собой, угол между ребром D_1D и плоскостью основания призмы равен $\arccos\sqrt{\dfrac{1}{13}}$, $CD = 5\sqrt{6}$. Все грани призмы касаются некоторой сферы. Найдите угол между плоскостями D_1DC и ABC.

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{5}$.

Подсказка. Сначала докажите, что $ABCD$ — квадрат. Затем спроектируйте точку D на плоскость ABC. Пусть точка K — ее проекция. Затем рассмотрите трехгранный угол с вершиной D и ребрами DD_1, DK, DC.

Задача 6. Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 4, а высота равна $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

Через середины ребер AB, A_1C_1 и BB_1 проведена плоскость. Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью проведенного сечения.

Ответ: $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Подсказка. Введите систему координат с началом в точке B и осями BA, BC и BK, где BK — прямая, перпендикулярная BA.

Задача 7. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$. На ребрах SA и SD расположены точки E и F так, что $AE = 2ES$, $SF = 5DF$. Через точки E и F проведена плоскость, параллельная ребру CD. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания.

Ответ: $\arccos\frac{7}{11}$.

Подсказка. Задачу можно решать поразному — и методом координат, и через площадь проекции сечения, и через угол между нормалями. В двух последних случаях сначала надо доказать, что построенное сечение — равнобокая трапеция.

8. Даны пирамида $DABC$ и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань ABC. Окружность верхнего основания цилиндра пересекает ребра DA, DB и DC, а ее центр лежит на грани ABD. Радиус цилиндра равен 3, объем пирамиды равен $27\sqrt{2}$, ребро $AB = 24$. Найдите двугранный угол между гранями ABC и ABD.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Подсказка. Докажите, что треугольник, описанный около верхнего основания цилиндра, — прямоугольный. Найдите коэффициент подобия двух треугольников: основания пирамиды и треугольника, вписанного в верхнее основание цилиндра. Затем постройте линейный угол искомого двугранного угла и найдите его величину.

Задача 9. В пирамиде $DABC$ точка E — середина AB, а F — точка пересечения медиан грани BCD, $EF = 8$, $BD = \frac{5}{2}$. Сфера радиуса, равного 5, касается плоскостей ABD и BCD в точках E и F соответственно. Найдите угол между гранями ABD и BCD.

Ответ: $\arcsin\frac{24}{25}$.

Подсказка. Пусть точка O — центр данной сферы. Тогда искомый двугранный угол находится с помощью нормалей OE и OF. Для нахождения длин отрезков OE и OF рассмотрите плоскость OEF и четырехугольник с вершинами в точках O, E, F и в точке пересечения сферы с ребром BD.

Задачи из ЕГЭ

Задача 1. Основание параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб $ABCD$, $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = 45^\circ$. Найдите угол между плоскостями граней AA_1D_1D и AA_1B_1B.

Задача 2. Все боковые ребра пирамиды $MABCD$ равны, основание — прямоугольник $ABCD$, диагональ которого равна 2, а угол между диагоналями равен 30°. Высота пирамиды равна 2,5. Найдите тангенс угла между плоскостью основания и плоскостью, параллельной прямой AM и содержащей точки B и D.

Задача 3. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AB = AC$, $BC = 5$, $\sin\angle C = 0{,}2$. Расстояние от вершины C_1 до прямой AB равно 2,5. Найдите косинус угла между плоскостью основания призмы и плоскостью ABC_1.

Литература

1. *Рыжик В.И.* Об углах между скрещивающимися прямыми и немного о прочих углах // Математика для школьников. — 2008. — № 3, 4.

2. *Моденов П.С.* Задачи по геометрии. — М.: Наука, 1979.